

FÍSICA MATEMÁTICA I

ESPACIOS DE HILBERT Y OPERADORES LINEALES

Titulación: Licenciado en Física

Optativa, segundo curso, primer cuatrimestre

(6 créditos: 4 de teoría y 2 de problemas)

Profesoras: M^a Cruz Boscá (grupo 1) y Elvira Romera (grupo 2)

A) TEMARIO

I. ESPACIOS LINEALES

1. Espacio lineal: Definición y propiedades.
2. Subespacio lineal.
3. Suma de subespacios.
4. Dependencia e independencia lineal. Bases lineales o de Hamel.
5. Aplicaciones lineales.
 - 5.1. Definición y propiedades.
 - 5.2. Operador lineal inverso.
 - 5.3. Isomorfismos.
 - 5.4. Espacio lineal $L(L_1, L_2)$
 - 5.5. Composición de operadores.
 - 5.5. Proyectores.
6. Espacio cociente.
7. Funcionales lineales. Espacio dual $L^*(L_1, L_2)$.

II. ESPACIOS LINEALES NORMADOS Y ESPACIOS DE BANACH

1. Espacio topológico. Topología inducida por un conjunto. Subespacio topológico.
2. Espacio métrico.
 - 2.1. Definición de métrica y espacio métrico. Bolas.
 - 2.2. Topología inducida por una métrica. Subespacio métrico.
3. Espacio lineal topológico. Espacio lineal métrico. Subespacios.
4. Espacio lineal normado.
 - 4.1. Conceptos generales: norma, métrica derivada.
 - 4.2. Sucesiones.
 - 4.3. Operadores lineales continuos. Acotación y norma.
 - 4.4. Espacio $A(L)$.
5. Espacio de Banach. Isomorfismos. Compleción.
6. Series y expansiones.
7. Espacio dual $A^*(L)$.

III. ESPACIOS EUCLÍDEOS Y ESPACIOS DE HILBERT

1. Espacio euclídeo o pre-Hilbert.
 - 1.1. Definición de producto interno y propiedades.
 - 1.2. Desigualdad de Cauchy-Schwartz.
 - 1.3. Espacio euclídeo como espacio lineal topológico.
 - 1.4. Identidad de polarización. Ley del paralelogramo.
 - 1.5. Ortogonalidad. Complemento ortogonal. Proyectores ortogonales.
 - 1.6. Conjuntos ortonormales.
 - 1.6.1. Método de ortonormalización de Gram-Schmidt.

- 1.6.2. Bases ortonormales.
- 1.7. Espacio euclídeo separable.
- 2. Espacio de Hilbert.
 - 2.1. Definición y propiedades generales.
 - 2.2. Importancia para la Física.
 - 2.3. Teorema de proyección ortogonal.
 - 2.4. Aproximación óptima a un vector.
 - 2.5. Conjuntos ortonormales.
 - 2.6. Teorema de Riesz-Fisher.
 - 2.7. Isomorfismos.
 - 2.8. Espacios de Hilbert separables.
 - 2.9. Notación de Dirac.

IV. ESPACIOS DE FUNCIONES

- 1. Espacio $C_K[a,b]$.
- 2. Espacio $L^p[a,b]$.
- 3. Espacio de Hilbert $L^2[B, \mu]$. Bases.

V. OPERADORES Y FUNCIONALES

- 1. Operadores cerrados. Clausura de un operador.
- 2. Teoremas de extensión, inversión y gráfico cerrado para operadores acotados.
- 3. Teorema de representación de Riesz (Riesz-Fréchet). Isometría entre H y H^* .
- 4. Operadores en $A(H)$.
 - 4.1. Representación matricial.
 - 4.2. Adjunto de un operador.
 - 4.3. Operadores hermíticos o simétricos.
 - 4.4. Operadores autoadjuntos.
 - 4.5. Operadores positivos.
 - 4.6. Operadores normales.
 - 4.7. Operadores esencialmente autoadjuntos.
 - 4.8. Operadores isométricos.
 - 4.9. Operadores unitarios.
 - 4.10. Proyectores ortogonales.
 - 4.11. Operadores compactos. Operadores de Hilbert-Schmidt.

VI. TEORÍA ESPECTRAL

- 1. Resolvente y espectro de un operador lineal.
 - 1.1. Caracterización topológica.
 - 1.2. Clasificación de puntos espectrales.
 - 1.3. Criterios para la determinación y localización de $\sigma(A)$.
- 2. Espectro de normales, hermíticos, autoadjuntos y unitarios.
- 3. Espectro de compactos.
- 4. Representaciones espectrales.
 - 4.1. Descomposición espectral de compactos autoadjuntos.
 - 4.2. Descomposición espectral de compactos normales.
 - 4.3. Generalización a otros tipos de operadores.
 - 4.4. Resolución espectral de la unidad.
 - 4.5. Descomposición espectral de autoadjuntos. Transformada de Cayley.
- 5. Notación de Dirac.

VII. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA ELEMENTAL DE DISTRIBUCIONES

1. Funciones generalizadas y distribuciones.
2. Funciones Heaviside y delta de Dirac.
3. Soporte de una distribución
4. Propiedades de la delta de Dirac.
5. Transformada de Fourier.
6. Aplicaciones.

B) BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

- AA.VV.; *Métodos Matemáticos: Problemas de Espacios de Hilbert, Operadores lineales y Espectros*, Paraninfo, 2013.
- L. Abellanas y A. Galindo, *Espacios de Hilbert*, Eudema, 1987.
- T.M. Apostol, *Análisis Matemático*, Reverté, 1976.
- S. K. Berberian, *Introducción al espacio de Hilbert*, Teide, 1977.
- L. Debnath and P. Mikusinski, *Introduction to Hilbert Spaces*, Elsevier, 2005.
- P. García González, J. E. Alvarelos Bermejo y J. J. García Sanz, *Introducción al formalismo de la mecánica cuántica*, U.N.E.D., Madrid, 2001.
- G. Helmbert, *Introduction to spectral theory in Hilbert space*, North Holland, 1969.
- R. P. Kanwall, *Generalized functions (theory and technique)*, Academic Press, 1983.
- A. N. Kolmogórov y S.V. Fomín, *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*, M.I.R., 1975.
- R.D. Richtmyer, *Principles of Advanced Mathematical Physics*, vol. 1, Springer-Verlag, 1978.
- P. Roman, *Some modern mathematics for physicists and other outsiders*, vol. 2, Pergamon, 1975.
- A. Vera López y P. Alegría Ezquerro, *Un curso de Análisis Funcional. Teoría y problemas*, AVL, 1997.

C) LECTURA HISTÓRICA RECOMENDADA

- J. von Neumann, *Fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica*, C.S.I.C., Madrid, 1991 (traducción del original *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlín, 1932).