

---

# Universidad de Granada

Escuela Técnica Superior de Ingenierías  
Informática y de Telecomunicación.  
Facultad de Ciencias.

Departamento de Geometría y Topología

## CURVAS Y SUPERFICIES

Guía docente

Curso 2014-2015, 2º semestre del 4º curso del  
Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.



*ugr* | Universidad  
de Granada

Página 1

INFORMACIÓN SOBRE TITULACIONES DE LA UGR  
<http://grados.ugr.es>





También se recomienda tener conocimientos adecuados sobre:

- Álgebra lineal y multilineal
- Cálculo de una y varias variables
- Ecuaciones diferenciales ordinarias

#### **BREVE DESCRIPCIÓN DE CONTENIDOS (SEGÚN MEMORIA DE VERIFICACIÓN DEL GRADO)**

- Referencias de Frenet.
- Curvaturas de curvas.
- Superficies en el espacio.
- Curvaturas normales.
- Curvaturas de Gauss y media en superficies.
- Geodésicas.

#### **COMPETENCIAS GENERALES Y ESPECÍFICAS**

Competencias generales o básicas (CB):

- CB1. Poseer los conocimientos básicos y matemáticos de las distintas materias que, apoyándose en libros de texto avanzados, se desarrollan en el Grado en Matemáticas.
- CB2. Saber aplicar esos conocimientos básicos y matemáticos a su trabajo o vocación de una forma profesional y poseer las competencias que suelen demostrarse por medio de la elaboración y defensa de argumentos y la resolución de problemas dentro de las Matemáticas y de los ámbitos en que se aplican directamente.
- CB3. Saber reunir e interpretar datos relevantes (normalmente de carácter matemático) para emitir juicios que incluyan una reflexión sobre temas relevantes de índole social o científica.
- CB4. Poder transmitir información, ideas, problemas y sus soluciones, de forma escrita u oral, a un público tanto especializado como no especializado.
- CB5. Haber desarrollado aquellas habilidades de aprendizaje necesarias para emprender estudios posteriores con un alto grado de autonomía.
- CB6. Utilizar herramientas de búsqueda de recursos bibliográficos.

Competencias específicas (CE):

- CE1. Comprender y utilizar el lenguaje matemático. Adquirir la capacidad de enunciar proposiciones en distintos campos de las matemáticas, para construir demostraciones y para transmitir los conocimientos matemáticos adquiridos.
- CE2. Conocer demostraciones rigurosas de algunos teoremas clásicos.
- CE3. Asimilar la definición de un nuevo objeto matemático, y ser capaz de utilizar este objeto en diferentes contextos.
- CE4. Saber abstraer las propiedades estructurales y distinguirlas de aquellas puramente accidentales, y poder comprobarlas con demostraciones o refutarlas con contraejemplos, así como identificar errores en razonamientos incorrectos.
- CE5. Resolver problemas geométricos, planificando su resolución en función de las herramientas disponibles y de las restricciones de tiempo y recursos.
- CE6. Proponer, analizar, validar e interpretar modelos de situaciones reales sencillas, utilizando las herramientas matemáticas más adecuadas a los fines que se persigan.
- CE7. Utilizar aplicaciones informáticas de visualización gráfica para experimentar y resolver problemas.



## OBJETIVOS (EXPRESADOS COMO RESULTADOS ESPERABLES DE LA ENSEÑANZA)

- Utilizar el análisis matemático para la modelización de problemas geométricos.
- Comprender las nociones fundamentales de la curvatura en los diferentes contextos geométricos y su cálculo explícito.
- Automatización de los procedimientos de cálculo, algebraico y analítico, mediante su aplicación a situaciones geométricas.

## TEMARIO DETALLADO DE LA ASIGNATURA

### TEMARIO TEÓRICO:

#### Tema 1. Regularidad de curvas

- 1.1 Curvas parametrizadas. Traza de una curva.
- 1.2 Curvas regulares. Recta tangente. Plano osculador.
- 1.3 Longitud de arco.

#### Tema 2. Referencia de Frenet y curvaturas de curvas

- 2.1. Teoría local de curvas planas: diedro de Frenet y curvatura.
- 2.2. Teoría local de curvas en el espacio: curvatura, torsión y triedro de Frenet.
- 2.3. Ecuaciones de Frenet.
- 2.4. Teorema fundamental de curvas en el plano y en el espacio.

#### Tema 3. Superficies en el espacio

- 3.1. Definición de superficie. Ejemplos.
- 3.2. El plano tangente y la primera forma fundamental.
- 3.3. La diferencial de una aplicación diferenciable.
- 3.4. Recta normal. Orientabilidad. Aplicación de Gauss

#### Tema 4. Curvaturas de Gauss y media en superficies

- 4.1. Secciones normales y curvaturas normales.
- 4.2. La aplicación de Gauss y el operador de Weingarten.
- 4.3. Segunda forma fundamental. Teorema de Meusnier.
- 4.4. Direcciones y líneas asintóticas.
- 4.5. Direcciones principales y líneas de curvatura. Teorema de Olinde Rodríguez.
- 4.6. Curvatura normal, curvaturas principales y fórmula de Euler.
- 4.7. Curvatura de Gauss y curvatura media.
- 4.8. Clasificación de los puntos de una superficie por sus curvaturas.
- 4.9. Expresiones locales de la aplicación de Gauss y de las curvaturas.

#### Tema 5. Curvas geodésicas.

- 5.1. Distancia intrínseca de una superficie. Curvas minimizantes.
- 5.2. Variaciones de una curva. Puntos críticos de la longitud.
- 5.3. Geodésicas: definición, propiedades y ejemplos.
- 5.4. Flujo geodésico.
- 5.5. Superficies completas. Teorema de Hopf-Rinow.



## TEMARIO PRÁCTICO:

Por cada tema del programa de teoría se entregará a los alumnos al menos una hoja de ejercicios, problemas y/o actividades complementarias.

Este material se trabajará durante las sesiones teóricas, las sesiones prácticas, los seminarios, las tutorías y las exposiciones orales.

## BIBLIOGRAFÍA

### BIBLIOGRAFÍA FUNDAMENTAL:

- AMORES LÁZARO, A.M.: Curso básico de curvas y superficies. Edit. Sanz y Torres, Madrid, 2001.
- CARMO, M.P. DO: Geometría diferencial de curvas y superficies. Alianza Universidad Textos, 135. Alianza Editorial, Madrid, 1992.
- CORDERO, L.A., FERNÁNDEZ, M. y GRAY, A.: Geometría diferencial de curvas y superficies (con Mathematica). Addison-Wesley iberoamericana, Wilmington, 1995.
- MONTIEL, S., ROS, A.: Curves and Surfaces. American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics, 69 (2005). Traducción de la versión en español: MONTIEL, S., ROS, A.: Curvas y Superficies. Proyecto Sur de Ediciones, Granada, 1997.

### BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA:

- COSTA, A.F., GAMBOA, M. y PORTO, A.M.: Notas de Geometría diferencial de curvas y superficies. Edit. Sanz y Torres, Madrid, 1977.
- OPREA, J. Differential Geometry and its applications. Prentice-Hall, N. J. 1997.
- STRUIK, D.J.: Geometría diferencial clásica. Aguilar, Madrid, 1973

## ENLACES RECOMENDADOS

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Curves.html>

<http://xahlee.info/>

<http://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Curves>

<http://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Surfaces>

## METODOLOGÍA DOCENTE

La metodología docente a seguir en la materia constará de:

- Un 30% de docencia presencial en el aula. Sesiones con todo el grupo dedicadas tanto a la explicación de contenidos del programa como a la realización de ejercicios relativos a dichos contenidos.
- Un 10% para resolución guiada de problemas con todo el grupo, tutorías colectivas, seminarios, exposiciones y pruebas de evaluación.
- Un 60% de trabajo del alumno, búsqueda, consulta y tratamiento de información, así como resolución de problemas y casos prácticos, y realización de trabajos.
- Las actividades formativas se desarrollarán desde una metodología participativa y aplicada que se centrará en el trabajo del estudiante (presencial y no presencial / individual y grupal).



## EVALUACIÓN (INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN, CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y PORCENTAJE SOBRE LA CALIFICACIÓN FINAL, ETC.)

De acuerdo con la “Normativa de Evaluación y de Calificación de los Estudiantes de la Universidad de Granada”, con objeto de evaluar la adquisición de los contenidos y competencias a desarrollar en la materia, se utilizarán alternativamente los sistemas de evaluación continua y de evaluación única final.

- **Evaluación continua:**  
Será el método preferente de evaluación. Se trata de un sistema de evaluación diversificado, en el que se tendrán en cuenta los siguientes apartados:
  1. Se realizarán varias pruebas escritas a lo largo del curso. Se realizará también un examen final de toda la asignatura impartida durante el curso en convocatoria ordinaria y otro en convocatoria extraordinaria.
  2. Participación activa en las sesiones teóricas, seminarios, exposiciones orales, talleres con ordenador y tutorías.
- **Evaluación única final:**  
Será un método excepcional de evaluación, podrán acogerse a él aquellos estudiantes que no puedan, por causa debidamente justificada, seguir el régimen de evaluación continua.  
La evaluación única final se realiza en un solo acto académico que podrá incluir cuantas pruebas sean necesarias para acreditar que el estudiante ha adquirido la totalidad de las competencias descritas en la Guía Docente de la asignatura. Esencialmente consistirá de un examen teórico-práctico de todo el temario detallado anteriormente. La calificación final será el 100% de la obtenida en el examen

Las calificaciones finales se expresará mediante calificación numérica de acuerdo con lo establecido en el artículo 5 del R.D. 1125/2003, de 5 de septiembre, por el que se establece el sistema europeo de créditos y el sistema de calificaciones en las titulaciones universitarias de carácter oficial y validez en el territorio nacional. La calificación global corresponderá a la puntuación ponderada de los diferentes aspectos y actividades que integran el correspondiente sistema de evaluación.

## CALENDARIO DE EXÁMENES

- Prueba parcial de Curvas: Al finalizar el tema 2. Sin interrupción de docencia.
- Prueba parcial de Superficies: Al finalizar el tema 5. Sin interrupción de docencia.
- Exámenes finales: Se seguirá el calendario establecido por la Comisión Docente de Matemáticas (calendario disponible a través de la web de la Facultad de Ciencias, <http://fciencias.ugr.es/>)

## INFORMACIÓN ADICIONAL

Adaptación de la Universidad de Granada al EEES:

<http://vicengp.ugr.es/pages/eess>

Información adicional sobre el Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas:

<http://grados.ugr.es/informaticaymatematicas/>

Información adicional sobre el Grado en Ingeniería Informática:

<http://grados.ugr.es/informatica/>

Información adicional sobre el Grado en Matemáticas:

<http://grados.ugr.es/matematicas>

Comisión docente de Matemáticas:

<http://www.ugr.es/~cdocmat/>



---

NOTAS:



*ugr*

Universidad  
de Granada

Página 8

INFORMACIÓN SOBRE TITULACIONES DE LA UGR  
<http://grados.ugr.es>