

# Aplicaciones de la derivada

## 1. Geometría

La *recta tangente* a una función  $f$  en un punto de la gráfica  $(a, f(a))$  es

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Por ejemplo, la recta tangente a la función  $f(x) = \log(x)$  en  $x = 2$  es, teniendo en cuenta que  $f'(x) = 1/x$ ,

$$y = f(2) + f'(2)(x - 2) = \log(2) + \frac{1}{2}(x - 2).$$

La *recta normal* en  $x = a$  es la recta perpendicular a la recta tangente que pasa por el punto  $(a, f(a))$ . Su pendiente será, por tanto,  $-1/f'(a)$ . La ecuación de la recta normal a la función  $f$  en el mismo punto es

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a).$$

### Ejemplo 1.

a) Calcula la recta tangente a la parábola  $y = x^2$  en el punto  $(3, 9)$ .

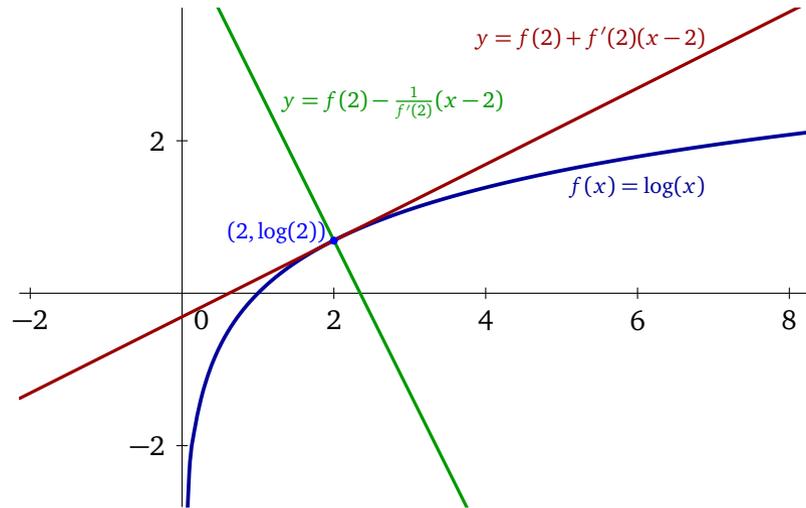


Figura 1: Recta tangente y recta normal

La derivada de la función  $f(x) = x^2$ , es  $f'(x) = 2x$ . Por tanto, la recta tangente en el punto  $(3, f(3)) = (3, 9)$  es

$$y = f(3) + f'(3)(x - 3) = 9 + 6(x - 3) = 6x - 9.$$

b) ¿Pasa dicha recta por el punto  $(1, 3)$ ?

La recta tangente pasa por el punto  $(1, 3)$  si dicho punto cumple la ecuación de la recta. Veamos:  $3 \neq 6 \cdot 1 - 9 = -3$ . El punto no pertenece a la recta tangente.

- c) Calcula aquellos puntos que cumplen que la recta tangente a la parábola pasa por el punto  $(1, -3)$ .

La recta tangente en un punto arbitrario  $(a, f(a))$  es

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) = a^2 + 2a(x - a) = 2ax - a^2$$

y lo que queremos encontrar son aquellos valores de  $a$  que hacen que el punto  $(1, -3)$  verifique está ecuación (pertenezca a la recta). Sustituimos  $x$  por 1 e  $y$  por  $-3$  y resolvemos:

$$\begin{aligned} -3 &= 2a \cdot 1 - a^2 \iff a^2 - 2a - 3 = 0 \\ &\iff a = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-3)}}{2} \\ &\iff a = \frac{2 \pm 4}{2} = -1, 3. \end{aligned}$$

Resumiendo, la recta tangente en los puntos  $(-1, 1)$  y  $(3, 9)$  pasa por el punto  $(1, -3)$ .

d) Calcula la recta normal a la parábola en el punto (3,9).

Aplicando la ecuación de la recta normal y teniendo en cuenta que  $f'(3) = 6$  nos queda:

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a) = 9 - \frac{1}{6}(x - 3) = \frac{57 - x}{6}$$

## 2. Estudio de una función

### 2.1. Crecimiento y decrecimiento

Si  $f$  es una función derivable definida en un intervalo, entonces

- $f$  es creciente si, y sólo si, la derivada es mayor o igual que cero;
- $f$  es decreciente si, y sólo si, la derivada es menor o igual que cero; y
- $f$  es constante si, y sólo si, la derivada es cero.

**Ejemplo 2.** Para estudiar el crecimiento de la función  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ , estudiamos el signo de la derivada:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff x = -1, 2.$$

Como sabemos donde se anula la derivada, también sabemos donde *no* se anula. Esto es, la función es monótona en  $] -\infty, -1]$ , en  $[-1, 2]$  y en  $[2, +\infty[$ . Evaluando la derivada en un punto de cada intervalo, terminamos:

- $f'(-3) = 60 > 0 \implies f$  es creciente  $] -\infty, -1]$ ;
- $f'(0) = -12 < 0 \implies f$  es decreciente  $[-1, 2]$ ; y,
- $f'(8) = 324 > 0 \implies f$  es creciente  $[2, +\infty[$ .

¿Sabrías decir algo sobre los máximos y mínimos relativos de esta función?

## 2.2. Extremos relativos

El cálculo de los máximos y mínimos relativos de una función  $f$  se suele hacer en dos pasos.

- i) En primer lugar se calculan los puntos críticos, es decir, resolvemos la ecuación  $f'(x) = 0$ .
- ii) Evaluamos la segunda derivada en los puntos críticos:
  - si  $f'(a) = 0$ , y además  $f''(a) > 0$ ,  $f$  tiene un mínimo relativo en  $a$ ;

- si  $f'(a) = 0$ , y además  $f''(a) < 0$ ,  $f$  tiene un máximo relativo en  $a$ .

**Ejemplo 3.** Si analizamos el signo de la derivada segunda de la función del ejemplo 2 en los puntos críticos que habíamos obtenido, concluimos cuál es mínimo y cuál es máximo. Como  $f''(x) = 12x - 6$ , tenemos:

- $f''(-1) = -18 < 0$ , por tanto en  $x = -1$  tenemos un máximo relativo.
- $f''(2) = 18 > 0$ , por tanto en  $x = 2$  tenemos un mínimo relativo.

¿Concuerdan estas conclusiones con las que has obtenido estudiando el cambio de monotonía en torno a ambos puntos?

### 2.3. Concavidad y convexidad

Si  $f$  es una función dos veces derivable,

- Si  $f''$  es positiva, entonces  $f$  es convexa; y
- Si  $f''$  es negativa, entonces  $f$  es cóncava.

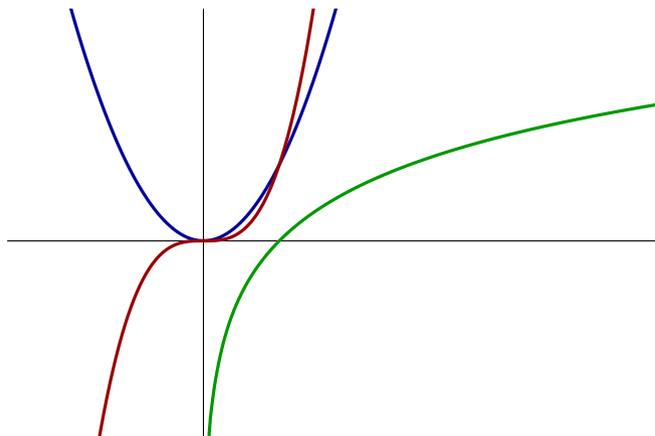


Figura 2: Funciones cóncavas, convexas y puntos de inflexión

## 2.4. Puntos de inflexión

Si  $f''(a) = 0$  y  $f'''(a) \neq 0$ , decimos que  $f$  tiene un punto de inflexión en  $a$ . Esto quiere decir que en dicho punto la función pasa de ser cóncava a convexa o al revés.

**Ejemplo 4.** Seguimos con la función del ejemplo 2. Como  $f''(x) = 12x - 6$  tenemos que  $12x - 6 = 0 \iff x = 1/2$ . Ya tenemos nuestro candidato a punto de inflexión. Ahora calculamos la derivada tercera:  $f'''(x) = 12$ , con lo que  $f'''(1/2) = 12 > 0$ . Por tanto, tenemos un punto de inflexión en  $x = 1/2$ . Vamos a calcular ahora si pasa de cóncava a

convexa, o viceversa. Para ello, evaluamos  $f''$  en puntos a ambos lados de  $x = 1/2$ :

- $f''(0) = -6 < 0$ , por lo que la función antes de  $1/2$  es cóncava.
- $f''(1) = 6 > 0$ , por lo que la función después de  $1/2$  es convexa.

## 2.5. Ejemplo

Vamos a aplicar todos los apartados anteriores para hacer el estudio completo de la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ .

**Crecimiento y decrecimiento** Calculamos los puntos donde se anula la derivada para averiguar el signo del resto.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \iff x = -3, 1$$

Miramos el signo de la derivada en algunos puntos intermedios: por ejemplo,  $f'(-10) > 0$ ,  $f'(0) < 0$  y  $f'(5) > 0$ . Por tanto,

- $f$  es creciente en  $] -\infty, -3]$ ,
- $f$  es decreciente en  $[-3, 1]$  y

- $f$  es creciente en  $[1, +\infty[$ .

**Extremos relativos** Ya que sabemos los puntos críticos, evaluamos la segunda derivada:

$$f''(x) = 6x + 6, \quad f''(-3) = -12, \quad \text{y } f''(1) = 12.$$

Por tanto,

- $f$  tiene un máximo relativo en  $-3$  y
- $f$  tiene un mínimo relativo en  $1$ .

**Convexidad y concavidad** Para estudiar la concavidad y convexidad de una función, miramos el signo de la segunda derivada:

$$f''(x) = 6x + 6 = 0 \iff x = -1.$$

Por tanto,

- $f''(x)$  es positiva en  $] -\infty, -1]$  (función convexa)
- $f''(x)$  es negativa en  $[-1, +\infty[$  (función cóncava)

**Puntos de inflexión** En  $-1$  la función tiene un punto de inflexión: la segunda derivada se

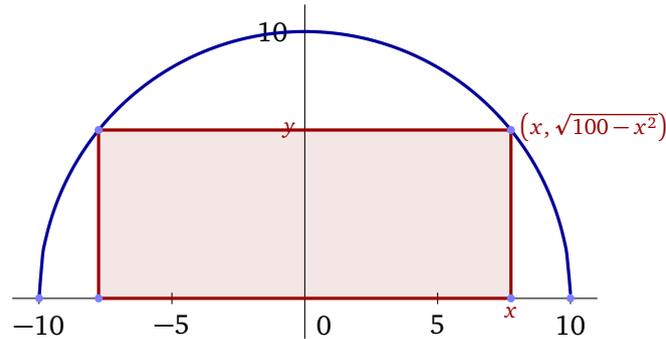
anula y la tercera en dicho punto es positiva o, si lo prefieres, la función cambia de de convexa a cóncava.

### 3. Optimización

En los problemas en los que hay que optimizar una cantidad, ya sea buscar un máximo o un mínimo, los pasos suelen ser los siguientes:

- i) Planteamos analíticamente la función a optimizar utilizando tantas variables como sean necesarias.
- ii) Buscamos las relaciones entre las diferentes variables usando los datos del enunciado y dejamos todas en función de una de ellas.
- iii) Derivamos, igualamos a cero y calculamos los puntos críticos.
- iv) Comprobamos con la segunda derivada que tenemos un máximo o un mínimo relativo.

**Ejemplo 5.** Vamos a calcular las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo de radio 10.



- i) Según hemos comentado, el primer paso es encontrar la función a optimizar. Si llamamos  $x$  al extremo inferior derecho del rectángulo e  $y$  a la altura, el área es  $2xy$ .
- ii) ¿Cómo podemos relacionar  $x$  e  $y$ ? Hay varias formas de hacerlo: la circunferencia centrada en el origen y de radio 10 está formada por los puntos  $(x, y)$  que cumplen la ecuación

$$x^2 + y^2 = 100$$

con lo que despejando,  $y = \sqrt{100 - x^2}$ . Ya podemos escribir la función a optimizar:

$$f: [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2xy = 2x\sqrt{100 - x^2}.$$

iii) Derivamos

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \left( \sqrt{100 - x^2} - \frac{2x^2}{2\sqrt{100 - x^2}} \right) = 2 \left( \frac{100 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} \right) \\ &= \frac{2(100 - 2x^2)}{\sqrt{100 - x^2}} \end{aligned}$$

e igualamos a cero

$$f'(x) = 0 \iff 100 - 2x^2 = 0 \iff x = \frac{10}{\sqrt{2}}.$$

iv) Para comprobar que es un máximo, vemos la segunda derivada es negativa:

$$f''(x) = -\frac{6x}{\sqrt{100 - x^2}} - \frac{2x^3}{(100 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y f''(10/\sqrt{2}) = -8.$$

## 4. Ejercicios

**Ejercicio 1.** Estudia la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x$ .

**Ejercicio 2.** Calcula la ecuación de la recta (o rectas) tangente a la gráfica de  $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 1$  paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

**Ejercicio 3.** Halla los valores de la constante  $\lambda$  para los que las rectas tangentes a las funciones  $f(x) = x^3$  y  $g(x) = (x + \lambda)x$  en el punto  $x = 1$  sean:

- a) Paralelas                      b) Perpendiculares

**Ejercicio 4.** Esboza la gráfica de una función  $f$  definida en  $[0, 2]$  que verifique que  $f(0) = f(2) = 0$ ,  $f'(0) = 2$  y  $f'(2) = -2$ .

**Ejercicio 5.** Dibuja la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de  $y = \sqrt{x}$ ,  $x = 6$ ,  $y = 0$  y calcula las dimensiones del rectángulo inscrito de lados paralelos a los ejes y que tenga máxima área.

**Ejercicio 6.** Considera la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f(x) = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$ .

- a) Calcula las asíntotas de la gráfica de  $f$ .
- b) Determina los intervalos de monotonía (crecimiento y decrecimiento).
- c) Determina los extremos relativos de  $f$ .
- d) Esboza la gráfica de  $f$ .

**Ejercicio 7.** Haz un estudio completo de la función  $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$  y representa su gráfica.

**Ejercicio 8.** Haz un estudio completo de la función  $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$  y representa su gráfica.

**Ejercicio 9.** A partir de la gráfica de  $f(x) = \cos(x)$ , dibuja la gráfica de las funciones siguientes:

a)  $f(x) = \cos(x + 1)$ ,

c)  $f(x) = \cos(2x)$ ,

e)  $f(x) = \cos(x) + 1$ ,

b)  $f(x) = \cos(x - 1)$ ,

d)  $f(x) = \cos(x) - 1$ ,

f)  $f(x) = |\cos(x)|$ .