Números complejos

Cálculo

J. Alaminos, J. Extremera, P. Muñoz

Grado en Ingeniería Informática

Granada, 2022-2023

UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Contenidos

Consideremos en el conjunto $\mathbb{R}^2$ las operaciones

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d)\\ (a, b)(c, d) &= (ac - bd, ad + bc)\end{aligned}$$

$\mathbb{R}^2$ con estas dos operaciones es un *cuerpo* que se representa por $\mathbb{C}$ y sus elementos se llaman *números complejos*.

Todo número real $a \in \mathbb{R}$, se puede escribir como $(a, 0) \in \mathbb{C}$, es decir, $a \equiv (a, 0)$. Además, el número complejo $i = (0, 1)$, que verifica:

$$i^2 = (0,1)\ (0,1) = (-1,0) \equiv -1$$

es conocido como *la unidad imaginaria*. Con todo esto:

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0)(0,1) = a + b(0,1) = a + ib$$

Definición

Todo $z \in \mathbb{C}$ se puede escribir de forma binómica:

$$z = a + ib,$$

donde $a = \mathrm{Re}(z)$ (parte real de z), $b = \mathrm{Im}(z)$ (parte imaginaria de z)

Trabajando en forma binómica, las operaciones con números complejos, suma y producto, se escriben así:

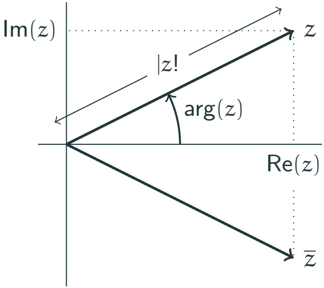
$$a + ib + c + id = a + c + i(b + d)$$
$$(a + ib)(c + id) = ac - bd + i(ad + bc)$$

Ejemplos

- $(1 + i) + (7 - 3i)$
- $(1 + 2i)(3 - i)$
- $\frac{1+i}{2-i}$

Definición

Si $z = a + ib$ es un número complejo (con a y b reales), entonces el *conjugado* de z se define como $\bar{z} = a - ib$ y el *módulo*, o valor absoluto, de z se define como $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Proposición

Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Entonces

a) $\overline{\overline{z}} = z$,

b) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$,

c) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$,

d) $|z|^2 = z\overline{z}$,

e) $\text{máx}\{|\text{Re}(z)|, |\text{Im}(z)|\} \leqslant |z| \leqslant |\text{Re}(z)| + |\text{Im}(z)|$,

f) $|zw| = |z|\,|w|$,

g) $|z+w| \leqslant |z| + |w|$.

Ejemplos

- $\frac{1+i}{2-i}$
- $(1+i)^{10}$

Defnición

Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, hay infinitos números $t \in \mathbb{R}$ que verifican la igualdad $z = |z|\,(\cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t))$ cualquiera de ellos recibe el nombre de *argumento* de z. El conjunto de todos los argumentos de un número complejo no nulo se representa por $Arg(z)$.

$$Arg(z) = \{\theta \in \mathbb{R} : z = |z|\,(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))\}$$

El único argumento que se encuentra en el intervalo $]-\pi, \pi]$ se le llama *argumento principal*, y lo representamos como $\arg(z)$.

Dado $z \in \mathbb{C}$ no nulo, y sea $t = \arg(z)$:

$$z = |z| \left(\cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t)\right) = |z| \; e^{it} = |z|_t \,,$$

donde hemos usado que la función exponencial compleja se define:

$$e^{a+ib} = e^{a} \left(\cos(b) + i \; \mathrm{sen}(b)\right).$$

Ejemplos

- $z = \sqrt{2}_{\pi}$. Pasamos a forma binómica.
- $z = 1 + i$. Pasamos a forma polar.

El producto de números complejos no nulos en forma polar se rige por la *fórmula de Moivre*:

$$z\,w = |z|\;|w|\,\big(\cos(\arg(z)+\arg(w)) + i\,\mathrm{sen}(\arg(z)+\arg(w))\big).$$

Como consecuencia, el cociente de dos números complejos no nulos:

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}\big(\cos(\arg(z)-\arg(w)) + i\,\mathrm{sen}(\arg(z)-\arg(w))\big),$$

y la potencia de base un número complejo $z \neq 0$, y exponente $n \in \mathbb{N}$:

$$z^n = |z|^n\big(\cos(n\arg(z)) + i\,\mathrm{sen}(n\arg(z))\big).$$

Ejemplos

- i^6
- $(1+i)^{10}$