

Trabajo Fin de Grado en Física

# Técnica S-Pulso aplicada a la identificación de blancos de radar

Jesús Rodríguez Camacho

1 de julio de 2015

Tutores:

David Blanco Navarro  
M<sup>a</sup> Carmen Carrión Pérez

*Departamento de Física Aplicada  
Universidad de Granada*

## Abstract

The main purpose of this work is to analyze the conducting target identification method based on S-Pulses and to optimize it, so that it can be used in noisy environments. This method matches every target in a library to a function, called S-Pulse, which contains information on the target natural frequencies. This work is divided into six sections. In the first one there are physical and mathematical tools required to use S-Pulses and a wide explanation of how a target discrimination method works. In the second one, two discrimination schemes are built for the same set of three targets. One of these schemes is an original idea of this work. The third section is about the signal scattered by a conducting target, which is built using the Singularity Expansion Method, and the mathematical operations done on this signal and on S-Pulses. In the fourth section a new discrimination scheme is featured. This scheme is made of S-Pulses that have free parameters that can be fit so that discrimination capability is as high as possible. The final research is exposed at fifth section. It shows the probability to identify the target that produces the signal as the right target for different noise levels. Conclusions from these results are presented at last section.



ugr

Universidad  
de Granada

Facultad de  
Ciencias



# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>3</b>
1.1	Frecuencias naturales y señales armónicas amortiguadas . . . . .	3
1.2	Transformadas de Laplace y Fourier. Teorema de la Convolución . . . . .	4
1.3	Conceptos de E-Pulso y S-Pulso . . . . .	5
1.4	Proceso de discriminación del blanco . . . . .	6
1.5	Conjuntos de funciones base . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Construcción de S-Pulsos sobre <math>\beta</math>-splines polinómicos</b>	<b>11</b>
2.1	S-Pulsos continuos y truncados . . . . .	11
2.2	Condiciones del S-Pulso. Sistema de ecuaciones . . . . .	12
2.3	Construcción de los S-Pulsos continuos . . . . .	14
2.4	Construcción de los S-Pulsos truncados . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Generación de la señal del hilo y convoluciones con los S-Pulsos</b>	<b>19</b>
3.1	Generación de la señal . . . . .	19
3.2	Convolución de la señal del hilo con los S-Pulsos . . . . .	20
3.3	Medida cuantitativa de la capacidad discriminatoria del método . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Construcción de S-Pulsos sobre <math>\beta</math>-splines exponenciales</b>	<b>26</b>
4.1	Obtención de los $\beta$ -splines exponenciales de menor orden . . . . .	26
4.2	Optimización sobre $\beta$ -splines exponenciales de orden 1 . . . . .	29
4.3	Optimización sobre $\beta$ -splines exponenciales continuos de orden 2 . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Identificación de blancos en presencia de ruido</b>	<b>32</b>
5.1	Simulación del ruido . . . . .	32
5.2	Probabilidad de acierto según el nivel de ruido . . . . .	33
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>35</b>
	<b>Referencias</b>	<b>38</b>

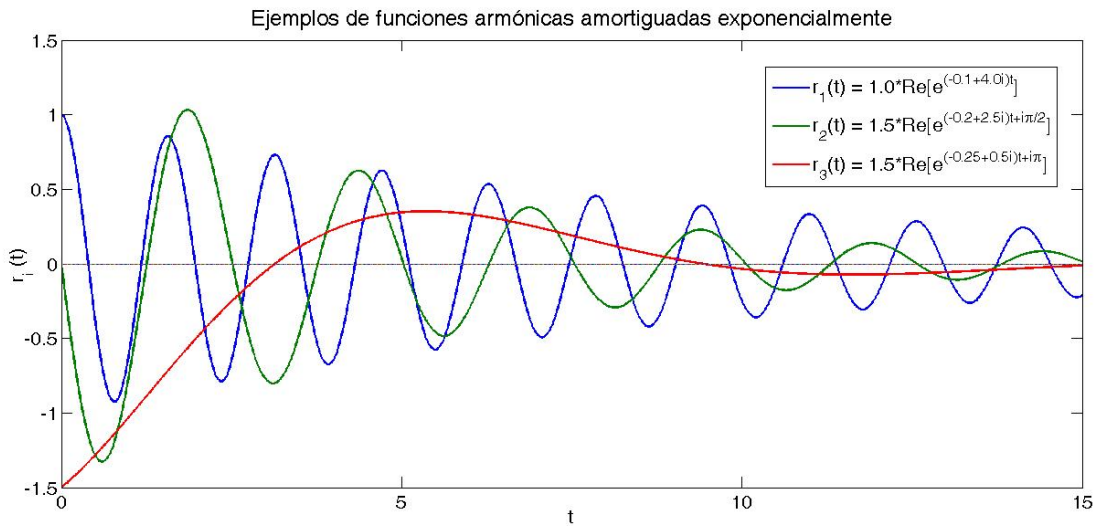
## 1 Introducción

### 1.1 Frecuencias naturales y señales armónicas amortiguadas

Desde el punto de vista electromagnético, cada blanco conductor está unívocamente caracterizado por un conjunto infinito de frecuencias naturales complejas,  $s_i = \sigma_i + j\omega_i$ , que dependen de su geometría y de sus características electromagnéticas [1]: la conductividad ( $\sigma$ ), la permitividad eléctrica ( $\epsilon$ ), y la permeabilidad magnética ( $\mu$ ). Por lo tanto, las frecuencias naturales son independientes de la orientación relativa del blanco con respecto al radar que lo excita. Estas frecuencias surgen al imponer las condiciones de contorno periódicas (continuidad) que deben verificar las corrientes en la superficie del blanco y, a diferencia de las frecuencias de las ondas estacionarias en una cuerda fija por sus extremos, no pueden expresarse como determinados múltiplos de una frecuencia fundamental. Cuando se emite un pulso de radar que incide sobre el blanco a identificar, la respuesta del blanco una vez todo el pulso ha interactuado con él (*late time*), presenta un espectro de frecuencias caracterizado por las frecuencias naturales del blanco conductor contenidas en el ancho de banda del pulso de radar emitido. La contribución al campo eléctrico generado por el blanco (en el *late time*) debida a una sola frecuencia compleja es de la forma [1]

$$r_i(t) = A_i e^{\sigma_i t} \cdot \cos(\omega_i t + \phi_i) = \text{Re} [A_i e^{s_i t + \phi_i}]$$

que corresponde a una onda plana de frecuencia  $\omega_i$  multiplicada por un factor  $e^{\sigma_i t}$ , donde  $\sigma_i$  ha de ser negativa, ya que la energía que porta la onda del campo electromagnético ha de ser finita integrada a todo el espacio. El aspecto de estas funciones es el siguiente:

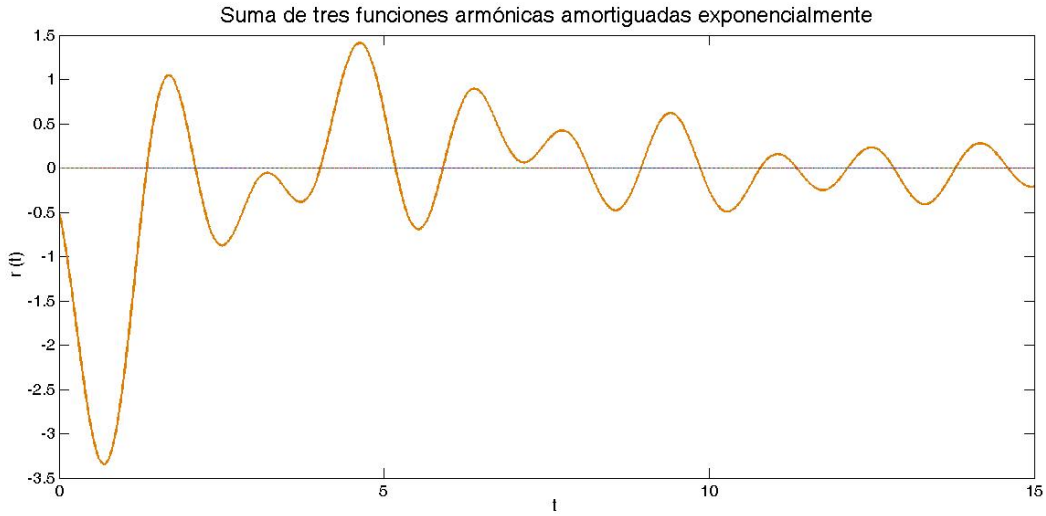


Superponiendo las respuestas debidas a cada una de las  $m$  frecuencias naturales que se hallan dentro del ancho de banda del radar que excita el blanco se obtiene la respuesta del blanco:

$$r(t) = \sum_{i=1}^m A_i e^{\sigma_i t} \cdot \cos(\omega_i t + \phi_i) = \text{Re} \left[ \sum_{i=1}^m A_i e^{s_i t + \phi_i} \right]$$

A diferencia de las frecuencias naturales complejas, las amplitudes y los desfases de cada componente espectral de la respuesta sí dependen de la orientación del blanco conductor,

lo que hace que la respuesta en el dominio del tiempo sea difícil de predecir, y complica el trabajo directo con ella. Sumando las tres funciones de la gráfica anterior se obtiene:



## 1.2 Transformadas de Laplace y Fourier. Teorema de la Convolución

Por eso es muy útil tratar este tipo de señales, las formadas por un conjunto finito de frecuencias complejas, en el dominio de la frecuencia (*DF*). Dos herramientas que se emplearán para ello en este trabajo son la transformada de Laplace (*TL*) y la de Fourier (*TF*).

La transformada de Laplace de una función  $r(t)$  evaluada en  $s = \sigma + j\omega$  se define:

$$R(s) \equiv \mathcal{L}\{r(t)\}(s) = \int_0^{\infty} r(t) \cdot e^{-st} dt$$

Como  $s$  es una variable compleja, la función transformada  $\mathcal{L}\{r(t)\}$  está definida en un dominio complejo, y para visualizarla es necesario representar una superficie sobre dicho dominio. Sin embargo, la transformada de Fourier es una función (compleja) de variable real:

$$R(\omega) \equiv \mathcal{F}\{r(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

y su módulo puede visualizarse con una gráfica corriente (2D). De hecho, la *TF* no es más que la intersección del plano  $\sigma = 0$  con la superficie que representa la *TL* si  $r(t) = 0$  en  $t < 0$ . Cada una de estas transformadas presenta, por tanto, una ventaja y un inconveniente: la *TL* permite trabajar directamente sobre las frecuencias naturales (complejas) del sólido pero es más difícil de analizar y requiere un tiempo de cálculo numérico mayor. La *TF* permite un trabajo más cómodo, pero no permite el trabajo directo con las frecuencias naturales complejas.

Se utilizarán a lo largo de este trabajo ambas transformadas según convenga. También será de importancia fundamental el Teorema de la Convolución, que establece que la transformada de Laplace de una convolución,

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau$$

es igual al producto de las transformadas de Laplace de las funciones convolucionadas:

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) = F(s) \cdot G(s)$$

Del mismo modo, la *TF* de una convolución es igual al producto de las *TF* de las funciones convolucionadas. La transformada de Laplace para una función armónica amortiguada de frecuencia compleja  $s_i = \sigma_i + j\omega_i$  está definida para  $\text{Re}[s] = \sigma > \sigma_i$  y vale:

$$r_i(t) = \text{Re} \left[ A_i e^{s_i t + j\phi_i} \right] \implies R_i(s) = \mathcal{L}\{r_i(t)\}(s) = A_i e^{j\phi_i} \frac{s - \sigma_i}{(s - \sigma_i)^2 + \omega_i^2}$$

Esta función diverge cuando  $\sigma \rightarrow \sigma_i$ , y por tanto la función  $R_i(s)$  presenta un polo en la frecuencia compleja  $s_i$  y otro en su complejo conjugada,  $s_i^*$ . En general, la transformada  $R(s) = \mathcal{L}\{r(t)\}(s)$  tiene como polos las frecuencias complejas que contribuyen a la respuesta del blanco  $r(t)$  y sus valores complejo conjugados. Hay una equivalencia entre frecuencias complejas complejo conjugadas, si  $s_i$  es frecuencia natural de un blanco, entonces también lo será  $s_i^*$ .

### 1.3 Conceptos de E-Pulso y S-Pulso

Aplicando el teorema de la convolución, si se multiplica  $R(s)$  por una función  $Ep(s)$  que se anule en las frecuencias naturales y en las complejo conjugadas, y el comportamiento asintótico (tendiendo a 0) de  $Ep(s)$  prevalece sobre el comportamiento divergente de  $R(s)$  cerca de todas las  $s_i$  y  $s_i^*$ , el producto  $R(s) \cdot Ep(s)$  no presentará polos en ningún valor de  $s_i$ ,  $s_i^*$ . Se dice entonces que se ha extinguido la frecuencia compleja  $s_i$ . Una función  $ep(t)$  que verifique que su transformada  $Ep(s) = \mathcal{L}\{ep(t)\}(s)$  se anule en todas las frecuencias naturales y sus complejo conjugadas se denomina *pulso de extinción* o E-Pulso (*Extinction-Pulse*) del blanco conductor con frecuencias naturales  $s_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Si  $Ep(s)$  es una función sin singularidades, el producto  $R(s) \cdot Ep(s)$  tampoco las tendrá, y dado que  $R(s)$  es muy pequeña lejos de sus polos, el resultado será que el producto es prácticamente nulo en todo el dominio complejo de  $R(s)$ . Como consecuencia, en el dominio del tiempo, la convolución

$$(r * ep)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(\tau) \cdot ep(t - \tau) \cdot d\tau$$

cuya *TL* es  $Ep(s) \cdot R(s)$ , es también una función prácticamente nula.

Si en lugar de emplear un E-Pulso  $ep(t)$  cuya transformada de Laplace  $Ep(s)$  se anule en todas las frecuencias naturales y en sus complejo conjugadas, empleamos una función  $sp_n(t)$  cuya transformada de Laplace  $Sp_n(s)$  se anule en todas excepto en una de ellas (la  $n$ -ésima) y en su complejo conjugada, el resultado del producto  $R(s) \cdot Sp_n(s)$  será nulo en todo el plano complejo excepto en  $s_n = \sigma_n + j\omega_n$  y en  $s_n^* = \sigma_n - j\omega_n$ , donde tendrá polos. Por lo tanto, en el dominio del tiempo la señal observada al convolucionar  $r(t)$  y  $sp_n(t)$  será una señal armónica amortiguada correspondiente a la frecuencia compleja  $s_n$  (o  $s_n^*$ ). La función  $sp_n(t)$  se denomina *pulso de extracción* del modo  $n$ -ésimo y, en general, se habla de S-Pulsos (*Single-Pulses*) para las funciones  $sp_n(t)$ ,  $n = 1, \dots, m$ , que extraen alguno de los  $m$  modos naturales del blanco dentro del ancho de banda del radar. [2]

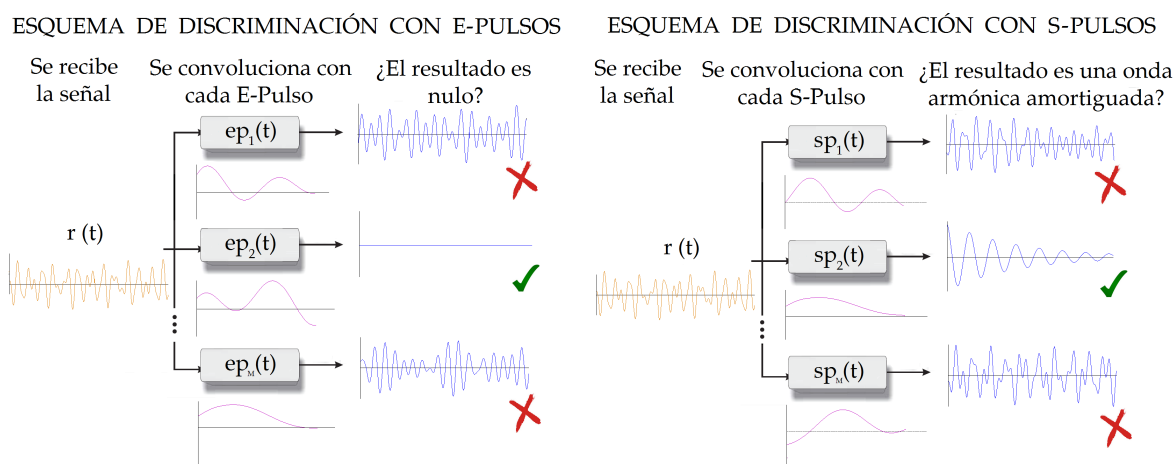
Si las funciones  $Ep(s)$  (o  $Sp(s)$ ) no presentan un 0 en todas (o todas menos una) las frecuencias naturales y sus complejo conjugadas, aparecerán en el producto de las transformadas de Laplace varios polos complejos, lo que significa que la convolución de la señal con el E-Pulso (o S-Pulso) no será nula (ni tampoco una señal armónica amortiguada), sino una superposición de varias señales armónicas amortiguadas, una para cada frecuencia natural del blanco conductor que no ha sido extinguida.

Para construir un E-Pulso o S-Pulso para un blanco solo es necesario el conocimiento de sus frecuencias naturales. El comportamiento de E-Pulsos y S-Pulsos puede utilizarse para la discriminación de blancos de radar, construyendo un E-Pulso o un S-Pulso para cada uno de los blancos de una librería. El método de discriminación se detalla a continuación.

#### 1.4 Proceso de discriminación del blanco

Si se dispone de E-Pulsos de todos los blancos de una librería entre los que se encuentra el blanco problema, el procedimiento para identificarlo consiste en convolucionar, para cada blanco de la librería, su E-Pulso con la respuesta  $r(t)$  recibida del blanco. En la práctica, este proceso de convolución de  $r(t)$  con un conjunto de pulsos se realiza haciendo pasar la señal por un banco de filtros, donde los filtros corresponden con los pulsos. Si el resultado de la convolución no es cero, entonces el blanco seleccionado de la librería no coincide con el blanco problema. Si para algún blanco de la librería el resultado de la convolución es nulo, ese será el blanco problema. El procedimiento para identificar un blanco problema conociendo algún S-Pulso de cada uno de ellos es similar al anterior, salvo que la identificación del blanco no se produce ahora cuando la convolución ( $r * sp_n$ ) es nula, sino cuando es igual a una señal armónica amortiguada.

#### ESQUEMAS DE DISCRIMINACIÓN EN RECEPCIÓN



En el esquema representado en la figura, el blanco problema se identifica como el segundo blanco de la librería de  $M$  blancos.

Dos ventajas de este método de discriminación son que es independiente de la orientación del blanco (el método y los filtros lo son) y que el proceso de identificación es

muy rápido, ya que solo requiere del paso de la señal por un banco de filtros. Pueden presentarse algunos problemas con este método. Por un lado, el deterioro de la señal que emite el blanco en el trayecto hasta su recepción y el ruido (superposición de la radiación presente en el medio a la señal del blanco) pueden hacer que la respuesta  $r(t)$  recibida presente pequeñas componentes en frecuencias distintas a las naturales del blanco conductor, y por tanto  $R(s)$  tenga un valor apreciable en frecuencias distintas de las naturales o sus complejo conjugadas, provocando que la convolución para el blanco correcto no sea la esperada. Por otro lado, puede ocurrir que los E-pulsos o S-Pulsos correspondientes a dos blancos distintos de la librería, tras la convolución con la función respuesta  $r(t)$ , den un resultado muy parecido si las frecuencias naturales son similares, y no se pueda distinguir cuál de los dos blancos de la librería es el blanco problema para una señal dispersada no perfecta. Estos problemas son más importantes cuanto menor es la ratio  $S/N$  (*Signal to Noise*), cociente entre la intensidad de la señal emitida por el blanco y la del ruido ambiental.

Del mismo modo que pueden utilizarse E-Pulsos y S-Pulsos como funciones analíticas para convolucionarlas sobre la respuesta que se recibe del blanco conductor, también es posible sintetizar ondas de campo electromagnético en las que el campo eléctrico tenga la forma de  $ep(t)$  o  $sp_n(t)$ . Si la señal que envía el radar al blanco es de esta forma, y carece de todas o todas excepto una frecuencia natural, al incidir sobre el blanco la respuesta que este proporciona es nula, en el caso del E-Pulso, o una señal armónica amortiguada exponencialmente, en el caso del S-Pulso, en aplicación del Método de Expansión en Singularidades (*SEM*). No sería necesario, por tanto, tratar matemáticamente (convolucionar) la señal recibida con funciones de referencia, pero habría que emitir distintas señales, hasta que la señal dispersada posea la forma deseada. Este es el llamado esquema de emisión y fue el esquema inicial que se propuso [4]. Su principal inconveniente es la dificultad para sintetizar y radiar el campo eléctrico con la forma deseada. En este trabajo se utiliza el esquema de recepción (el de la imagen de la página anterior), que es el más utilizado por ser técnicamente más sencillo de analizar en la práctica y menos vulnerable al ruido.

En general, ni los E-Pulsos ni los S-Pulsos son únicos para un blanco dado, a diferencia de sus frecuencias naturales, ya que solo existen restricciones respecto a su contenido espectral. Varias investigaciones recientes han tratado de estudiar qué funciones son las más convenientes para ser empleadas como E-Pulsos o como S-Pulsos de forma que se optimice el proceso de discriminación de blancos [3] [6]. Trabajando con E-Pulsos, esto requiere que la convolución sea lo más cercana posible a cero para todo  $t$  cuando se utiliza el E-Pulso correspondiente al blanco correcto y lo más distinta posible de cero cuando se utiliza el E-Pulso correspondiente a otro blanco. Trabajando con S-Pulsos, la convolución debe ser lo más parecida posible a una función armónica amortiguada cuando se emplee el S-Pulso correspondiente al blanco correcto y lo más diferente posible de una función armónica amortiguada cuando se emplee el S-Pulso correspondiente a otro blanco. Para que el esquema se pueda utilizar en la práctica es especialmente necesario optimizar el funcionamiento del sistema de discriminación cuando se trabaja con bajos cocientes  $S/N$ , es decir, cuando hay mucho ruido que contamina la señal emitida por el blanco. Uno de los objetivos fundamentales de este trabajo es optimizar la calidad del método de discriminación de blancos de radar, obteniendo pulsos de extracción median-

te diversos procedimientos analíticos y comparando los resultados obtenidos con cada tipo de S-Pulsos. Para ello será necesario cuantizar la calidad de discriminación un esquema concreto, lo que se hará más adelante.

Para poner en práctica el método de discriminación, este será aplicado a una librería formada por tres blancos, cada uno de ellos es un hilo conductor. La elección de este conjunto de blancos se debe a que los hilos son los conductores más sencillos que pueden estudiarse, donde tanto la señal dispersada como las frecuencias naturales se conocen analíticamente. Una propiedad que verifican es que existe una relación entre la longitud  $L$  de un hilo y sus frecuencias naturales  $s_i$ , para los hilos del mismo material y de igual sección [8]:

$$s_i L = cte, \quad i = 1, \dots, m$$

Uno de los hilos tendrá longitud  $L$ , y otros dos, longitudes  $0.9L$  y  $1.1L$ . Con estos blancos también se consigue que las frecuencias naturales de los blancos de la librería sean parecidas, situándonos en una situación donde la identificación puede ser problemática. Se etiquetarán los hilos utilizando su longitud relativa al primero,  $L_r = 1.0, 0.9$  y  $1.1$ , se construirá un S-Pulso para cada uno de ellos y después se generará la señal que emite el de  $L_r = 1.0$ . Finalmente, se estudiará el comportamiento del esquema de identificación para distintas condiciones (nivel de ruido, tipo de S-Pulsos utilizados, ángulo de orientación relativa del hilo respecto del radar, etc).

## 1.5 Conjuntos de funciones base

Para llevar a cabo la construcción analítica del S-Pulso, el procedimiento usual consiste en expresar la función  $sp_n(t)$  como combinación lineal de un conjunto de funciones base  $\{f_k(t)\}_{k=1}^M$ . A partir de ahora se supondrá, sin pérdida de generalidad, que la frecuencia natural que no extingue el S-Pulso es la última ( $m$ ) dentro del ancho de banda del radar, y se omitirá el subíndice  $n$  al hablar de S-Pulsos:  $sp(t) \equiv sp_m(t)$ . El S-Pulso  $sp(t)$  se expresa como:

$$sp(t) = \sum_{k=1}^M a_k^{(n)} f_k(t) \quad 0 \leq t \leq T$$

En las referencias citadas al final del trabajo se encuentran varios conjuntos de funciones base utilizadas, entre las que están distintos tipos de funciones armónicas y polinómicas. A parte de la condición de que la transformada de Laplace sea nula en las frecuencias naturales, se imponen distintas condiciones a la función  $sp(t)$ , dependiendo del conjunto de funciones base utilizado: continuidad, derivabilidad, etc.

Un primer conjunto de funciones base que puede utilizarse es el de los splines polinómicos. Un spline polinómico de grado  $k$  es una función definida a trozos, en la que cada trozo es un polinomio de grado  $k$ , que es continua y derivable hasta orden  $k - 1$ . Los trozos de la función tienen duración  $\tau$ , de forma que si hay  $n$  trozos el S-pulso tendrá una duración  $T = n\tau$ . La expansión del S-Pulso en este conjunto de funciones es de la forma:

$$sp(t) = \sum_{i=0}^{n-1} Q_i(t), \quad Q_i(t) = \begin{cases} a_0^{(i)} + a_1^{(i)}t + \dots + a_k^{(i)}t^k, & i \leq t/\tau < i+1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$



Al trabajar con estas funciones base se imponen las condiciones de continuidad y derivabilidad hasta orden  $k - 1$  que ha de cumplir el spline:

$$Q_i(t_{i+1}) = Q_{i+1}(t_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, n - 2$$

$$Q'_i(t_{i+1}) = Q'_{i+1}(t_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, n - 2$$

...

$$Q_i^{(k-1)}(t_{i+1}) = Q_{i+1}^{(k-1)}(t_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, n - 2$$

Además, debe imponerse la anulación de la transformada de Laplace en todas excepto la última de las  $m$  frecuencias naturales del blanco conductor en el ancho de banda del radar:

$$Sp(s_j) = Sp(s_j^*) = 0, \quad j = 1, \dots, m - 1$$

Se han de imponer, por tanto,  $k(n - 1)$  condiciones de continuidad y  $2m - 2$  ecuaciones correspondientes a la extinción de frecuencias naturales. Dado que para la determinación del S-Pulso hay que calcular los  $k + 1$  coeficientes del polinomio en cada uno de los  $n$  trozos del S-Pulso, hay en total  $n(k + 1)$  incógnitas. Si el número de ecuaciones es igual al de incógnitas, el sistema de ecuaciones es determinado y se dice que el S-Pulso que se está construyendo es *natural*. Si hay más incógnitas que ecuaciones se dice que es *forzado*, y han de imponerse condiciones adicionales. En este trabajo se trabajará exclusivamente con S-Pulsos naturales, pues son los más utilizados en la bibliografía relacionada. Los S-Pulsos forzados presentan un nuevo parámetro del que depende el comportamiento del sistema discriminante. Para los S-Pulsos naturales se tiene:

$$k(n - 1) + 2m - 2 = n(k + 1) \implies n = 2m - k - 2$$

Este valor de  $n$  será la duración temporal del S-Pulso natural en unidades de  $\tau$ . Los coeficientes de las ecuaciones del sistema anterior dependen de  $\tau$ , y para que exista una solución no trivial, el determinante de la matriz de coeficientes debe anularse. De modo general, esto ocurrirá solo para ciertos valores de  $\tau$ . Al imponer esta condición aparece una ecuación no lineal en  $\tau$ , que en general presenta varias soluciones. La solución más adecuada es el  $\tau$  más pequeño, que es la que hace el S-Pulso más corto, lo que es conveniente de cara a los cálculos posteriores (el motivo se explicará más adelante).

El conjunto de funciones base anterior presenta el inconveniente de que hay que imponer explícitamente muchas condiciones de continuidad y derivabilidad que alargan el trabajo. Este inconveniente desaparece si se utilizan los  $\beta$ -splines polinómicos para construir la función polinómica a trozos. La ventaja es que cualquier combinación lineal de  $\beta$ -splines desplazados será continua y derivable hasta cierto orden, sin necesidad imponer adicionalmente las condiciones de continuidad y derivabilidad. Las únicas condiciones que se han de imponer son, por tanto, la anulación de la transformada de Laplace en las frecuencias naturales del blanco conductor. Los  $\beta$ -splines polinómicos de orden  $l$ ,  $N_l(t)$ , son polinomios de grado  $l - 1$  a trozos. Se definen a partir del primero de ellos [3],

$$N_1(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De la forma:

$$N_l(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} N_{l-1}(x - t) N_1(t) dt$$

Algunas propiedades importantes que presentan los  $\beta$ -splines polinómicos son:

1. Tienen soporte compacto de tamaño igual a su orden,  $N_l(t) = 0$  si  $t \leq 0$  o  $t > l$ .
2. Cumplen la relación recursiva  $N_l(t) = \frac{t}{l-1} \cdot N_{l-1}(x) + \frac{l-t}{l-1} \cdot N_{l-1}(t-1)$ .
3. Son simétricos pares respecto al centro de su soporte,  $N_l(\frac{l}{2} + t) = N_l(\frac{l}{2} - t)$ .
4. El conjunto  $\{N_l(t)\}_{l=1}^{\infty}$  es una base del espacio de polinomios de cualquier grado.

A partir de la propiedad (2) se obtienen fácilmente las expresiones de los  $\beta$ -splines polinómicos de orden superior. Para obtener  $N_2(t)$ :

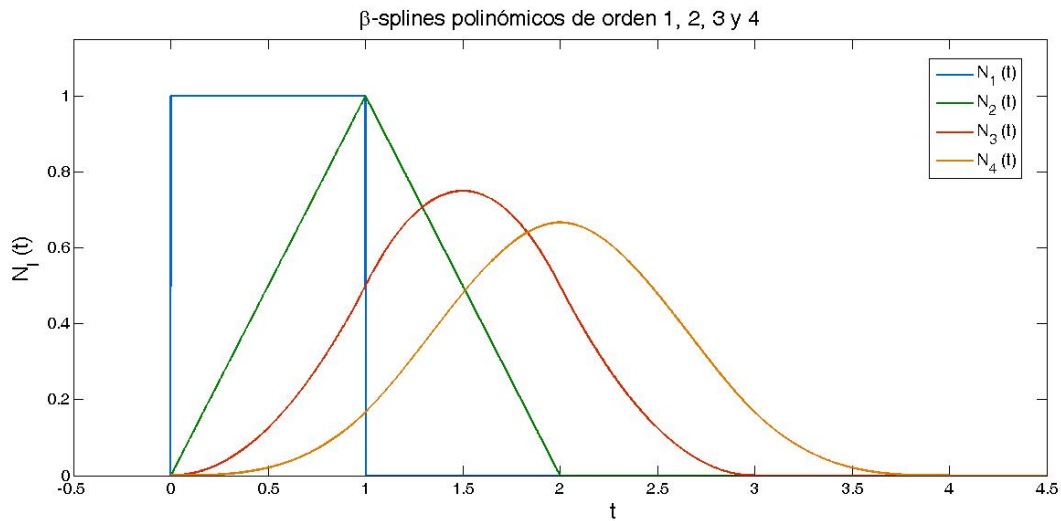
$$N_2(t) = \left(\frac{t}{2} - 1\right) \cdot N_1(t) + \left(1 - \frac{t}{2} - 1\right) \cdot N_1(t-1)$$

$$N_2(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 2 - t, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La expresión de  $N_3(t)$  y la de  $N_4(t)$  se obtienen de igual modo:

$$N_3(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2}, & 0 \leq t < 1 \\ -t^2 + 3t - \frac{3}{2}, & 1 \leq t < 2 \\ \frac{t^2}{2} - 3t + \frac{9}{2}, & 2 \leq t < 3 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad N_4(t) = \begin{cases} \frac{t^3}{6}, & 0 \leq t < 1 \\ -\frac{(t-1)^3}{2} + \frac{(t-1)^2}{2} + \frac{t-1}{2} + \frac{1}{6}, & 1 \leq t < 2 \\ \frac{(t-2)^3}{2} - (t-2)^2 + \frac{2}{3}, & 2 \leq t < 3 \\ -\frac{(t-4)^3}{6}, & 3 \leq t < 4 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La representación gráfica de los primeros  $\beta$ -splines polinómicos se realiza abajo. Este último conjunto va a ser el primero que se va a utilizar en este trabajo para la construcción analítica de S-Pulsos.



## 2 Construcción de S-Pulsos sobre $\beta$ -splines polinómicos

### 2.1 S-Pulsos continuos y truncados

Una vez se ha dividido la duración temporal  $T$  del S-Pulso en  $n$  intervalos de longitud  $\tau$ ,  $T = n\tau$ , hay dos formas de trabajar:

1. Expandir el S-Pulso utilizando solo los  $\beta$ -splines polinómicos contenidos totalmente dentro de la duración temporal del S-Pulso:

$$sp(t) = \sum_{r=0}^{n-1} C_r \cdot N_l \left( \frac{t}{\tau} - r \right)$$

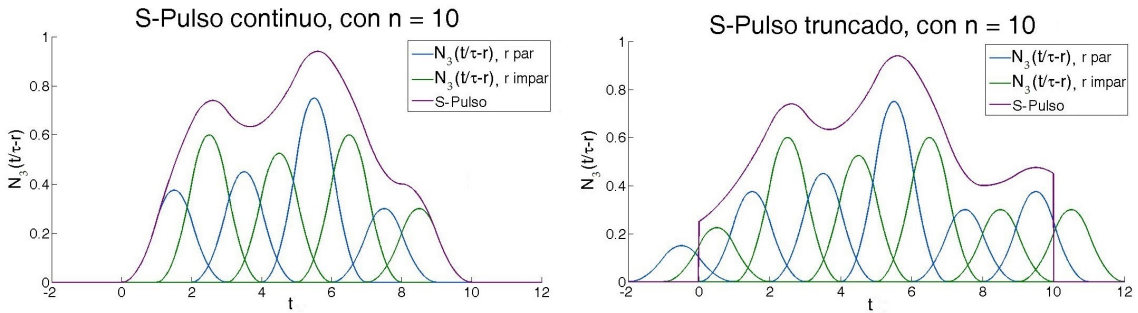
Fuera de  $0 \leq t \leq T$  el S-Pulso sería automáticamente nulo.

2. Expandir el S-Pulso utilizando también los  $\beta$ -splines polinómicos contenidos parcialmente en la duración temporal del S-Pulso:

$$sp(t) = \sum_{r=-l+1}^{n-1} C_r \cdot N_l \left( \frac{t}{\tau} - r \right)$$

Este desarrollo no es nulo en  $(-l+1)\tau < t < 0$  ni en  $n\tau < t < (n+l+1)\tau$ , luego debe considerarse válido el desarrollo solo en  $0 \leq t \leq T$ , quedando así:

$$sp(t) = \begin{cases} \sum_{r=-l+1}^{n-1} C_r \cdot N_l \left( \frac{t}{\tau} - r \right), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$



Una ventaja del primer método es que el S-Pulso obtenido será continuo y derivable en sus extremos  $t = 0$  y  $t = n\tau$ . El principal inconveniente es que, cerca de estos extremos, la forma del S-Pulso obtenido será necesariamente igual a la del  $\beta$ -spline de orden  $l$  utilizado, pues cerca de  $t = 0$  (o  $t = n\tau$ ) el S-Pulso consiste en una constante multiplicada por el  $\beta$ -spline situado más a la izquierda (o más a la derecha). Con el segundo método no se presenta este inconveniente, y corresponde al desarrollo en splines estándar presentado al comienzo de la sección 1.5, pero el S-Pulso no será continuo ni derivable en los extremos como consecuencia de truncar la expansión en estos puntos.

Toda la bibliografía referenciada utiliza los S-Pulsos truncados. Sin embargo, como quedará claro posteriormente, los S-Pulsos continuos reducen mucho los cálculos, y los resultados obtenidos utilizando ambos tipos de funciones son igual de aceptables. Por tanto, los S-Pulsos continuos pueden ser los más interesantes para la mayoría de las aplicaciones al campo de la discriminación de blancos de radar. Este tipo de S-Pulsos es una aportación original de este Trabajo de Fin de Grado.

## 2.2 Condiciones del S-Pulso. Sistema de ecuaciones

Para construir el S-Pulso hay que conocer los coeficientes  $C_r$  (incógnitas) y el valor de  $\tau$ . Al trabajar con S-Pulsos continuos hay  $n - l + 1$  coeficientes  $C_r$ , y con S-Pulsos truncados, hay  $n + l - 1$  coeficientes. Para determinarlos hay que recurrir a los requisitos que debe cumplir el S-Pulso. Los requisitos relacionados con la continuidad y la derivabilidad en  $(0, n\tau)$  quedan automáticamente satisfechos al trabajar con  $\beta$ -splines polinómicos. Debe imponerse la anulación de la transformada de Laplace del S-Pulso,  $Sp(s) = \mathcal{L}\{sp(t)\}(s)$ , evaluada en las  $m$  frecuencias naturales que el blanco conductor presenta en el ancho de banda del radar salvo en la última  $(s_1, \dots, s_{m-1})$ , y en sus valores complejo conjugados  $(s_1^*, \dots, s_{m-1}^*)$ . Entonces:

$$Sp(s_i) = Sp(s_i^*) = 0, \quad i = 1, \dots, m - 1$$

A partir de la expansión del S-Pulso y teniendo en cuenta que el soporte de  $sp(t)$  es  $[0, T]$ :

$$\begin{aligned} Sp(s_i) &= \mathcal{L}(sp(t))(s_i) = \sum_r C_r \cdot \int_0^T N_l\left(\frac{t}{\tau} - r\right) \cdot e^{-s_i t} dt = \\ &= \sum_r C_r \cdot \int_0^n N_l(t - r) \cdot e^{-s_i t \tau} \cdot \tau dt = \tau \cdot \sum_r C_r \cdot \int_0^n N_l(t - r) \cdot e^{-s_i t \tau} \cdot dt \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones homogéneo que resulta es:

$$\sum_r C_r \cdot \int_0^n N_l(t - r) \cdot e^{-s_i t \tau} \cdot dt = \sum_r C_r \cdot \int_0^n N_l(t - r) \cdot e^{-s_i^* t \tau} \cdot dt = 0, \quad i = 1, \dots, m - 1$$

Han aparecido tantas ecuaciones como el doble frecuencias naturales del blanco conductor dentro del ancho de banda del radar menos dos,  $2m - 2$ . Recordando que había  $n - l + 1$  o  $n + l - 1$  coeficientes  $C_r$  a determinar, puede establecerse una relación entre la duración temporal  $n$  del S-Pulso en unidades de  $\tau$ , el orden  $l$  de los  $\beta$ -splines polinómicos utilizados y el número  $m$  de frecuencias naturales dentro del ancho de banda del radar, de forma que el problema presente el mismo número de ecuaciones que de incógnitas. En concreto, para los S-Pulsos continuos,  $n - l + 1 = 2m - 2$ , mientras que para los S-Pulsos truncados,  $n + l - 1 = 2m - 2$ .

A continuación se desarrollan las integrales que aparecen en las ecuaciones anteriores. Si el soporte del  $\beta$ -spline polinómico  $N_l(t - r)$ , que es  $(r, r + l)$ , está contenido íntegramente entre los límites de integración, es decir, si  $r \geq 0$  y  $r + l \leq n$ , entonces la integral puede calcularse:

$$\int_0^n N_l(t - r) \cdot e^{-s_i t \tau} \cdot dt = \int_{-r}^{n-r} N_l(t) \cdot e^{-s_i t \tau} \cdot e^{-s_i r \tau} dt$$

Dado que  $n - r \geq l$  y  $-r \leq 0$ , fuera del dominio de integración anterior  $N_l(t)$  es nulo, y puede hacerse:

$$\int_{-r}^{n-r} N_l(t) \cdot e^{-s_i t \tau} \cdot e^{-s_i r \tau} dt = e^{-s_i r \tau} \cdot \int_0^\infty N_l(t) \cdot e^{-s_i t \tau} dt$$

La anterior integral es la transformada de Laplace de  $N_l(t)$ , que aplicando la definición de  $N_l(t)$  como convolución de  $N_{l-1}(t)$  y  $N_1(t)$ , y a su vez la de  $N_{l-1}(t)$  como convolución de  $N_1(t)$  y  $N_{l-2}(t)$ , y así sucesivamente, será el producto de la transformada de Laplace

de  $N_1(t)$  por la de  $N_{l-1}(t)$ , o la de  $N_1(t)$  por la de  $N_1(t)$  y por la de  $N_{l-2}(t)$ , o la de  $N_1(t)$  elevada a  $l$ . Entonces:

$$\begin{aligned} e^{-s_i r \tau} \cdot \int_0^\infty N_l(t) \cdot e^{-s_i t \tau} \cdot dt &= e^{-s_i r \tau} \cdot \int_0^\infty (N_{l-1} * N_1)(t) \cdot e^{-s_i t \tau} dt = \\ &= e^{-s_i r \tau} \cdot \int_0^\infty (N_1 * \dots^{(l \text{ veces})} * N_1)(t) \cdot e^{-s_i t \tau} dt = e^{-s_i r \tau} \cdot \left( \int_0^\infty N_1(t) \cdot e^{-s_i t \tau} dt \right)^l = \\ &= e^{-s_i r \tau} \cdot \left( \int_0^1 e^{-s_i t \tau} dt \right)^l = e^{-s_i r \tau} \cdot \left( \left[ \frac{-1}{s_i \tau} \cdot e^{-s_i t \tau} \right]_0^1 \right)^l = e^{-s_i r \tau} \cdot \left( \frac{1 - e^{-s_i \tau}}{s_i \tau} \right)^l \end{aligned}$$

En la construcción de S-Pulsos continuos solo aparecen integrales de este tipo. En la construcción de S-Pulsos truncados, sin embargo, aparecen algunas integrales en las que  $N_l(\frac{t}{\tau} - r)$  no es nulo para todo  $t$  fuera del dominio de integración. Estas integrales aparecen para  $-l+1 \leq r < 0$  y para  $n-l+1 \leq r \leq n-1$ , y han de calcularse explícitamente en cada caso, no existiendo una expresión general como la anterior. Sí aparece, no obstante, una relación entre las integrales correspondientes a  $r = r_1$  y  $r = n + r_1$ , si  $r_1 < 0$  (y por tanto  $n - r_1 > n$ ) [3]:

$$\begin{aligned} \int_{-r_1}^{n-r_1} N_l(t) \cdot e^{-s_i t \tau} dt + \int_{-(n+r_1)}^{-r_1} N_l(t) \cdot e^{-s_i t \tau} dt &= \left( \int_{-n-r_1}^{-r_1} + \int_{-r_1}^{n-r_1} \right) N_l(t) \cdot e^{-s_i t \tau} dt = \\ &= \int_0^n N_l(t) \cdot e^{-s_i t \tau} dt = \int_0^\infty N_l(t) \cdot e^{-s_i t \tau} dt = \left( \frac{1 - e^{-s_i \tau}}{s_i \tau} \right)^l \end{aligned}$$

Es decir, solo es necesario calcular la mitad de estas integrales. Quedará más clara esta propiedad en la construcción del S-Pulso truncado para los hilos.

Una vez calculadas las integrales de los  $\beta$ -splines polinómicos, se obtiene un sistema homogéneo de  $2m - 2$  ecuaciones y  $2m - 2$  incógnitas (los coeficientes  $C_r$ ). Para que este sistema tenga solución no trivial, el determinante de la matriz de coeficientes debe anularse. El primer paso, por tanto, es calcular el menor valor de  $\tau$  que anula el determinante de la matriz anterior. Después hay que obtener los coeficientes  $C_r$  resolviendo el sistema de ecuaciones compatible indeterminado. Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \cdots & M_{1,2m-3} & M_{1,2m-2} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \cdots & M_{2,2m-3} & M_{2,2m-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M_{2m-3,1} & M_{2m-3,2} & \cdots & M_{2m-3,2m-3} & M_{2m-3,2m-2} \\ M_{2m-2,1} & M_{2m-2,2} & \cdots & M_{2m-2,2m-3} & M_{2m-2,2m-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \cdots \\ C_{2m-3} \\ C_{2m-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En forma de sistema, puede resolverse:

$$M_{1,1}C_1 + M_{1,2}C_2 + \cdots + M_{1,2m-3}C_{2m-3} = -M_{1,2m-2}C_{2m-2}$$

$$M_{2,1}C_1 + M_{2,2}C_2 + \cdots + M_{2,2m-3}C_{2m-3} = -M_{2,2m-2}C_{2m-2}$$

...

$$M_{2m-3,1}C_1 + M_{2m-3,2}C_2 + \cdots + M_{2m-3,2m-3}C_{2m-3} = -M_{2m-3,2m-2}C_{2m-2}$$

Se debe extraer la submatriz cuadrada  $M_{2m-3}$  de orden  $2m - 3$  formada a partir de la matriz de coeficientes  $M$  eliminando la última fila y la última columna. También se extrae

el último coeficiente,  $C_{2m-2}$ , del vector de coeficientes  $C$ , para obtener  $C_-$ , de dimensión  $2m - 3$ , y los  $2m - 3$  primeros elementos de la última columna de la matriz se denotan por  $M_-$ . La matriz  $M$  será invertible siempre que el valor de  $\tau$  no anule su determinante (lo que ocurre en todos los casos que se tratan en este trabajo). Por tanto, asignando al parámetro  $C_{2m-2}$  el valor 1 se obtienen el resto de los coeficientes:

$$M_{2m-3}C_- = -M_- \implies C_- = -(M_{2m-3})^{-1} M_-$$

Es conveniente normalizar los coeficientes  $C_r$  obtenidos en los casos anteriores de forma que la energía de todos los S-Pulsos que puedan construirse, que es proporcional a la suma de los cuadrados de los coeficientes  $C_r$ , sea la misma. Dicha suma se igualará a 1 en todos los casos tratados en este trabajo.

### 2.3 Construcción de los S-Pulsos continuos

Ahora se va a construir el S-pulso continuo para el hilo de  $L_r = 1.0$ . Para facilitar el procedimiento de cálculo numérico se va a utilizar un sistema de unidades adecuado. Sean  $L$  la longitud del hilo y  $c$  la velocidad de la luz, se va a trabajar con las frecuencias naturales expresadas en unidades  $c/L$ . Esto significa que, para obtener el valor de las frecuencias naturales en su unidad en el sistema internacional ( $s^{-1}$ ), hay que multiplicar el valor numérico que se utiliza durante el cálculo por  $c$  y dividirlo por  $L$ . Utilizar este sistema de unidades implica que todas las variables que tengan dimensión temporal vendrán dadas en las unidades utilizadas en el cálculo, por ejemplo, el tiempo  $\tau$  obtenido estará expresado en unidades  $L/c$ . Las cinco primeras frecuencias (angulares) naturales del hilo son, en unidades  $c/L$  [8]:

$i$	1	2	3	4	5
$\sigma_i/\pi$	-0.0828	-0.1212	-0.1491	-0.1713	-0.1909
$\omega_i/\pi$	0.9251	1.912	2.884	3.874	4.854

Se van a considerar para la expansión del S-Pulso  $\beta$ -splines polinómicos de orden  $l = 3$ ,  $N_3(t)$ . Se va a suponer que el ancho de banda de la señal con la que se ilumina excita las 5 primeras frecuencias naturales del blanco. Por lo tanto,  $m = 5$ , y hay  $2 \cdot (5 - 1) = 8$  ecuaciones, y el número de incógnitas será  $n - l + 1 = n - 3 + 1 = n - 2$ . Entonces, para obtener el S-Pulso natural, la longitud del S-Pulso en unidades de  $\tau$  será  $n = 10$ .

Como trabajando con S-Pulsos continuos  $r$  solo puede tomar valores  $0 \leq r \leq n - l$ , todas las integrales que aparecen son del tipo

$$\int_0^n N_l(t - r) \cdot e^{-s_i t \tau} \cdot dt = e^{-s_i r \tau} \cdot \left( \frac{1 - e^{-s_i \tau}}{s_i \tau} \right)^l, \quad i = 1, \dots, m - 1$$

Luego el sistema de ecuaciones queda de la forma

$$\sum_{r=0}^7 C_r \cdot e^{-s_i r \tau} \cdot \left( \frac{1 - e^{-s_i \tau}}{s_i \tau} \right)^3 = 0, \quad i = 1, \dots, 4$$

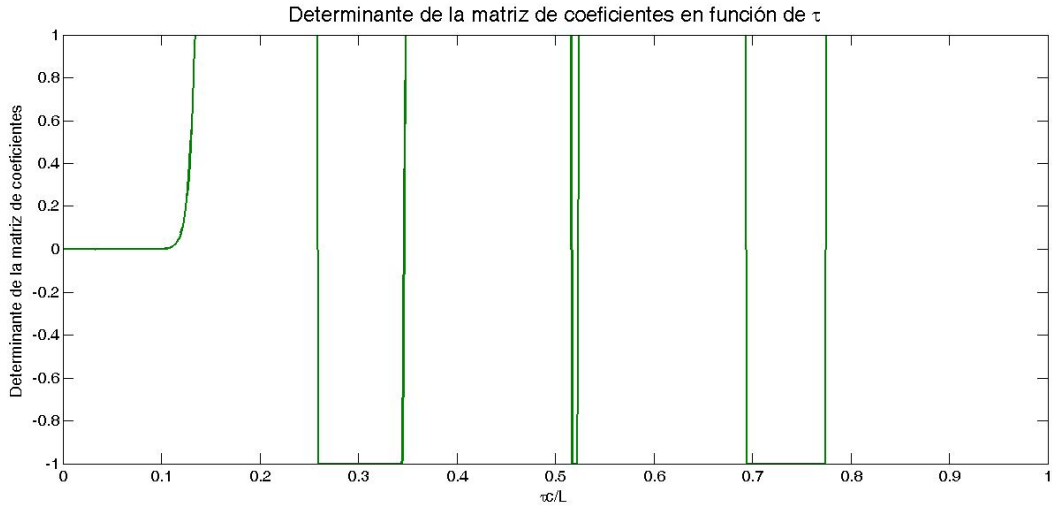
Y simplificando el factor común independiente de  $r$  entre paréntesis:

$$\sum_{r=0}^7 C_r \cdot e^{-s_i r \tau} = 0, \quad i = 1, \dots, 4$$

La matriz de coeficientes es

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{-s_1\tau} & e^{-2s_1\tau} & \dots & e^{-(n-l)s_1\tau} \\ 1 & e^{-s_1^*\tau} & e^{-2s_1^*\tau} & \dots & e^{-(n-l)s_1^*\tau} \\ 1 & e^{-s_2\tau} & e^{-2s_2\tau} & \dots & e^{-(n-l)s_2\tau} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & e^{-s_{m-1}^*\tau} & e^{-2s_{m-1}^*\tau} & \dots & e^{-(n-l)s_{m-1}^*\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-s_1\tau} & e^{-2s_1\tau} & \dots & e^{-7s_1\tau} \\ 1 & e^{-s_1^*\tau} & e^{-2s_1^*\tau} & \dots & e^{-7s_1^*\tau} \\ 1 & e^{-s_2\tau} & e^{-2s_2\tau} & \dots & e^{-7s_2\tau} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & e^{-s_4^*\tau} & e^{-2s_4^*\tau} & \dots & e^{-7s_4^*\tau} \end{pmatrix}$$

El primer paso es calcular el menor valor de  $\tau$  que anula el determinante de la matriz de coeficientes expuesta antes. En la gráfica se muestra el valor del determinante de la matriz de coeficientes para distintos valores de  $\tau$ .



El primer cero se alcanza en  $\tau = 0.2581 L/c$ . La variación del valor del determinante es muy rápida alrededor del primer cero, lo que facilita encontrarlo con precisión. Este comportamiento es general en todos los S-Pulsos construidos.

Tras resolver el sistema de ecuaciones y normalizar, los coeficientes  $C_r$  obtenidos son:

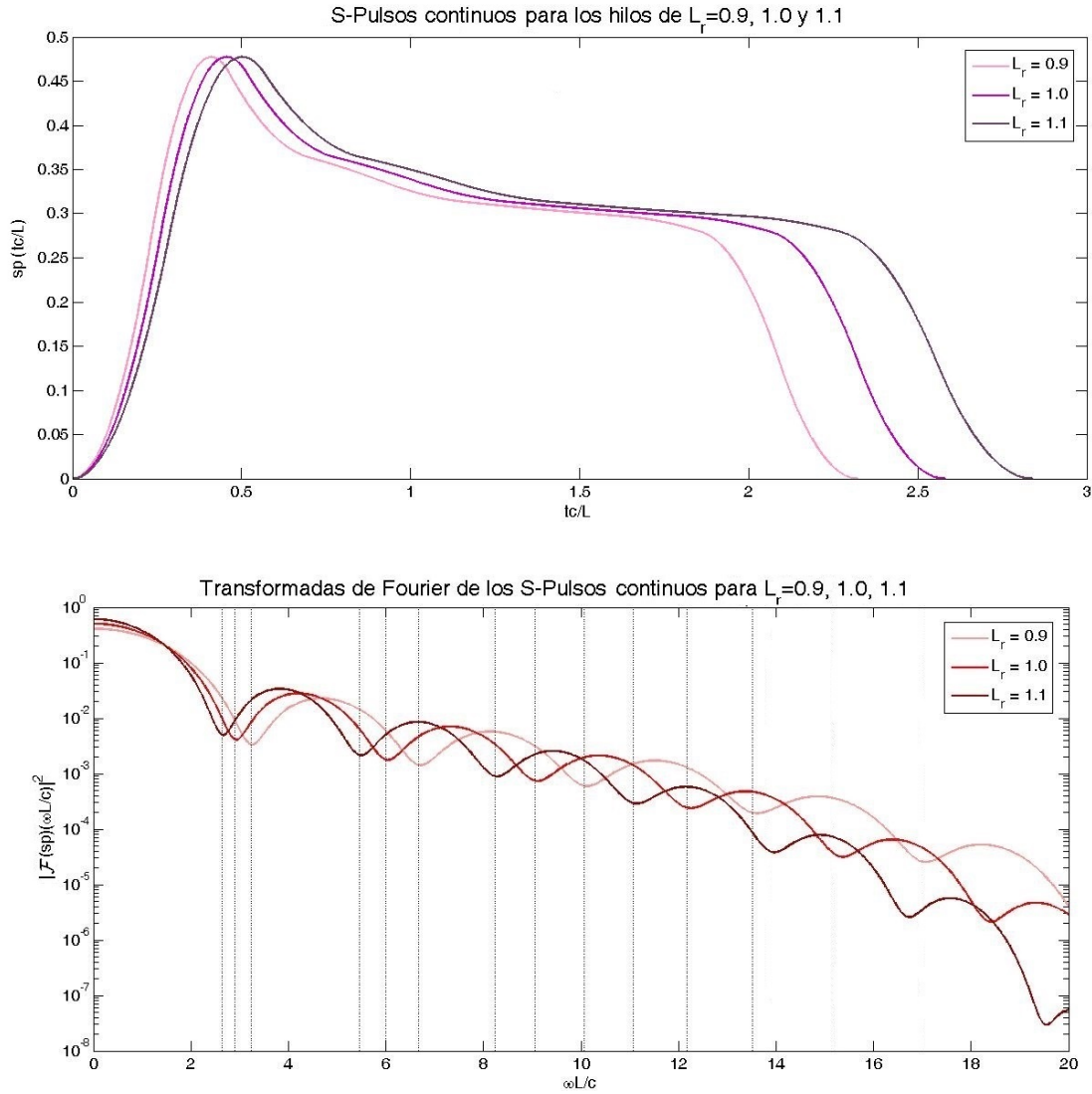
$r$	0	1	2	3	4	5	6	7
$C_r$	0.5402	0.3763	0.3515	0.3179	0.3084	0.3005	0.2937	0.2652

Ya ha quedado totalmente determinado el S-Pulso, pues se conocen todos los parámetros que aparecían en la expresión

$$sp(t) = \sum_{r=0}^{n-l} C_r \cdot N_l \left( \frac{t}{\tau} - r \right)$$

Siguiendo el mismo procedimiento se construyen los S-Pulsos para los hilos de longitud relativa  $L_r = 0.9$  y  $L_r = 1.1$ . Se ha justificado en la introducción la importancia de trabajar en el dominio de la frecuencia, y resulta útil representar la transformada de Fourier de los S-Pulsos. La representación gráfica de los S-Pulsos y la de sus transformadas de Fourier se encuentran en la página siguiente.

Se observan valles en las frecuencias naturales del hilo que se pretenden extinguir,  $s_i$ ,



$i = 1, \dots, 4$ , que aparecen con líneas punteadas en la gráfica de la  $TF$ . Se observan además más mínimos a frecuencias mayores, comportamiento que se observa en algunas fuentes de información consultadas [3]. Uno de estos mínimos es cercano a la frecuencia natural que no se quiere extinguir, pero no es coincidente, así que no supone ningún problema a la hora de identificar el blanco.

## 2.4 Construcción de los S-Pulsos truncados

Ahora se va a construir el S-Pulso considerando también todos los  $\beta$ -splines polinómicos de orden  $l = 3$  cuyo soporte esté contenido parcialmente dentro de  $(0, T)$ . La longitud del S-Pulso, en unidades de  $\tau$ , será  $n = 2(m - 1) - l + 1 = 8 - 3 + 1 = 6$ . La condición de la transformada de Laplace nula en todas las frecuencias naturales y en las complejo conjugadas excepto  $s_i$  se traduce en:

$$\sum_{r=-2}^5 C_r \cdot \int_0^6 N_3(t-r) \cdot e^{-s_i t \tau} \cdot dt = \sum_{r=-2}^5 C_r \cdot \int_0^6 N_3(t-r) \cdot e^{-s_i^* t \tau} \cdot dt = 0, \quad i = 1, \dots, 4$$



Para  $r = 0, 1, 2, 3$ , el integrando contiene completamente el soporte del  $\beta$ -spline polinómico de orden 3,  $(0, 3)$ , luego estas integrales coinciden con las calculadas en el caso anterior. Para los demás valores de  $r$  el dominio de integración no incluye todo el soporte del  $\beta$ -spline. Hay que calcular estas integrales. Sin embargo, solo hay que calcular dos de ellas, ya que las otras dos están relacionadas.

$$I_{s_i}^r = \int_0^n N_l(t-r) \cdot e^{-s_i t \tau} \cdot dt = \int_{-r}^{n-r} N_l(t) \cdot e^{-s_i(t+r)\tau} \cdot dt = e^{-s_i r \tau} \int_{-r}^{6-r} N_3(t) \cdot e^{-s_i t \tau} \cdot dt$$

$$r = -1 \Rightarrow \int_1^7 = \int_1^3 \quad r = 4 \Rightarrow \int_{-4}^2 = \int_0^2$$

$$r = -2 \Rightarrow \int_2^8 = \int_2^3 \quad r = 5 \Rightarrow \int_{-5}^1 = \int_0^1$$

Como

$$\left( \int_0^1 + \int_1^3 \right) N_3(t) \cdot e^{-s_i t \tau} \cdot dt = \left( \int_0^2 + \int_2^3 \right) N_3(t) \cdot e^{-s_i t \tau} \cdot dt = \left( \frac{1 - e^{-s_i \tau}}{s_i \tau} \right)^3$$

deben calcularse las integrales para  $r = -2$  y  $r = 5$  y obtener las otras dos a partir de ellas:

$$I_{s_i}^{-2} = \int_2^3 N_3(t) \cdot e^{-s_i t \tau} \cdot dt = \int_2^3 \left( \frac{t^2}{2} - 3t + \frac{9}{2} \right) \cdot e^{-s_i t \tau} \cdot dt = \frac{-2e^{-3s_i \tau} + e^{-2s_i \tau} (2 - 2s_i \tau + s_i^2 \tau^2)}{2s_i^3 \tau^3}$$

$$I_{s_i}^5 = \int_0^1 N_3(t) \cdot e^{-s_i t \tau} \cdot dt = \int_0^1 \frac{t^2}{2} \cdot e^{-s_i t \tau} \cdot dt = \frac{e^{-s_i \tau} (-2 - 2s_i \tau - s_i^2 \tau^2) + 2}{2s_i^3 \tau^3}$$

Inmediatamente se obtienen las integrales para  $r = -1$  y  $r = 4$ :

$$I_{s_i}^4 = \int_0^2 N_3(t) \cdot e^{-s_i t \tau} \cdot dt = \left( \frac{1 - e^{-s_i \tau}}{s_i \tau} \right)^3 - \int_2^3 N_3(t) \cdot e^{-s_i t \tau} \cdot dt$$

$$I_{s_i}^{-1} = \int_1^3 N_3(t) \cdot e^{-s_i t \tau} \cdot dt = \left( \frac{1 - e^{-s_i \tau}}{s_i \tau} \right)^3 - \int_0^1 N_3(t) \cdot e^{-s_i t \tau} \cdot dt$$

Tras calcular las demás integrales se había dividido a la hora de escribir la matriz de coeficientes por el factor común

$$\left( \frac{1 - e^{-s_i \tau}}{s_i \tau} \right)^3$$

Luego para que el resto de los coeficientes de las ecuaciones no cambien, han de dividirse las integrales anteriores por dicho factor. Introduciendo este factor y el término  $e^{-s_i r}$ , los coeficientes  $M_{s_i}^r$  de la ecuación quedan:

$$M_{s_i}^r = \frac{e^{-s_i r \tau} \cdot I_{s_i}^r}{\left( \frac{1 - e^{-s_i \tau}}{s_i \tau} \right)^3}$$

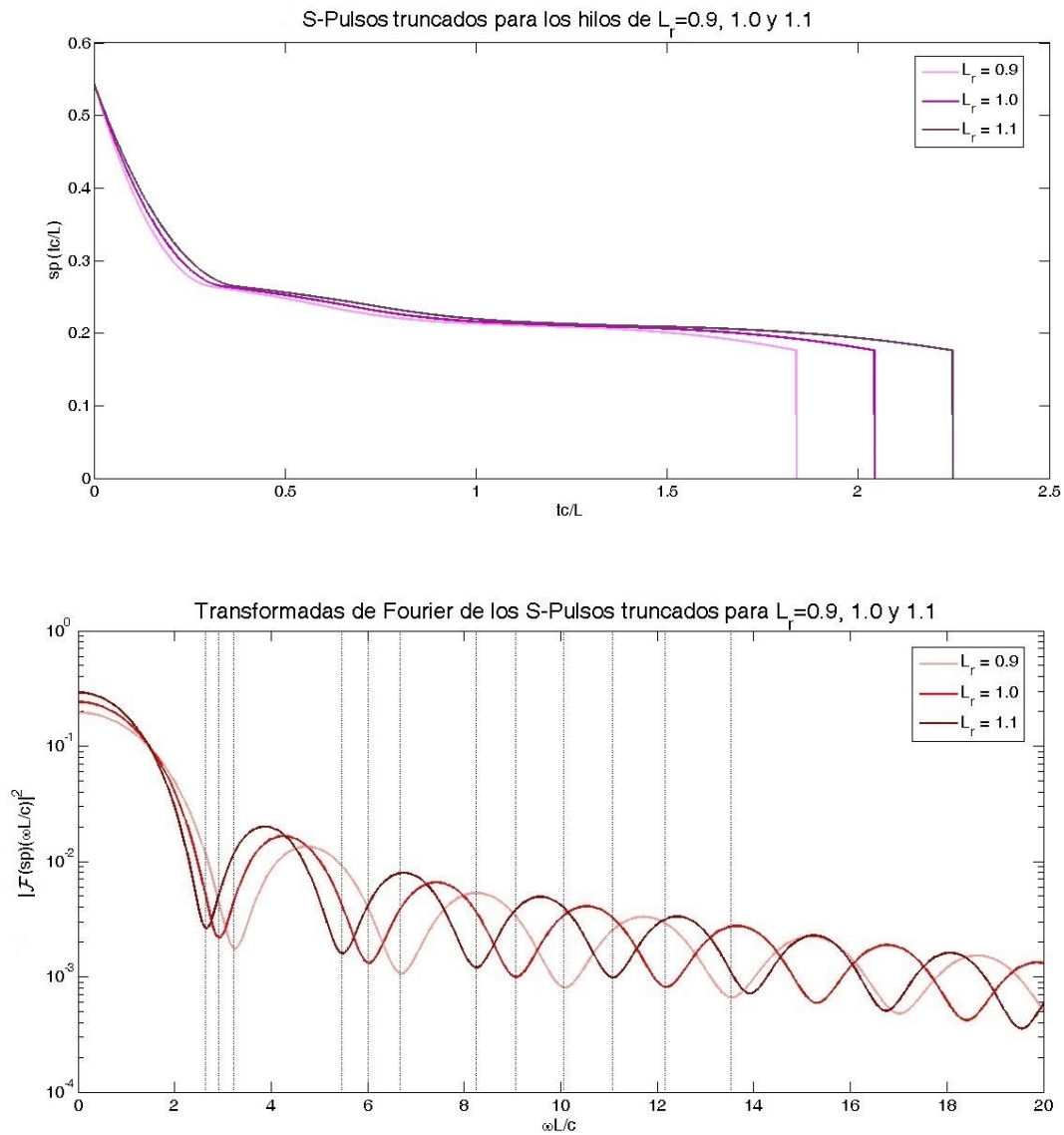
La matriz de coeficientes queda:

$$\begin{pmatrix} M_{s_1}^{-2} & M_{s_1}^{-1} & 1 & e^{-s_1 \tau} & e^{-2s_1 \tau} & e^{-3s_1 \tau} & M_{s_1}^4 & M_{s_1}^5 \\ M_{s_1}^{*-2} & M_{s_1}^{*-1} & 1 & e^{-s_1^* \tau} & e^{-2s_1^* \tau} & e^{-3s_1^* \tau} & M_{s_1}^{*4} & M_{s_1}^{*5} \\ M_{s_2}^{-2} & M_{s_2}^{-1} & 1 & e^{-s_2 \tau} & e^{-2s_2 \tau} & e^{-3s_2 \tau} & M_{s_2}^4 & M_{s_2}^5 \\ \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{s_4}^{*-2} & M_{s_4}^{*-1} & 1 & e^{-s_4^* \tau} & e^{-2s_4^* \tau} & e^{-3s_4^* \tau} & M_{s_4}^{*4} & M_{s_4}^{*5} \end{pmatrix}$$

Una vez se construye la matriz, el procedimiento es análogo al del caso anterior: se busca el primer  $\tau$  que anula el determinante, que se encuentra en  $\tau = 0.3403$ , después se resuelve el sistema compatible indeterminado, y a partir de los coeficientes  $C_r$  obtenidos se llega al S-Pulso. Los coeficientes normalizados son:

$r$	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$C_r$	0.8139	0.2753	0.2529	0.2194	0.2109	0.2066	0.1918	0.1604

Se representan los S-Pulsos truncados obtenidos para cada hilo y sus transformadas de Fourier:



Los S-Pulsos truncados son decrecientes durante todo su dominio temporal. Los continuos alcanzaban un máximo muy pronto y a partir de ahí también decaían. Ambos tipos de S-Pulso tienen formas parecidas. En cuanto a las transformadas de Fourier, en el caso de los S-Pulsos continuos decaían, con la frecuencia, más rápido que en el caso de S-Pulsos truncados. El decrecimiento puede llegar a ser problemático si el ancho de banda en el que se hallan las frecuencias naturales es muy amplio. En ese caso, el efecto

de extinción sobre los polos de la señal podría ser distinto para cada polo. Podría también ocurrir que una frecuencia natural pequeña que se desea extinguir, si el resto de frecuencias naturales son mucho mayores, no pueda extinguirse frente a ellas, debido a que el módulo de la  $TF$  del S-Pulso sea mayor en los mínimos de bajas frecuencias que en los máximos de altas frecuencias. Este razonamiento no es definitivo, y se someterá a prueba en la siguiente sección, explicando los resultados obtenidos.

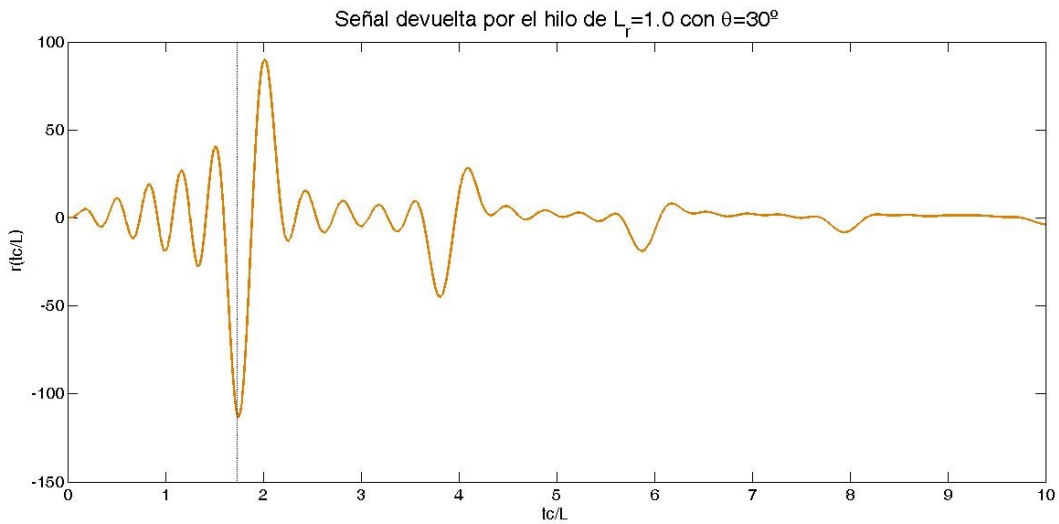
### 3 Generación de la señal del hilo y convoluciones con los S-Pulsos

#### 3.1 Generación de la señal

Una vez contruidos los dos tipos de S-Pulsos, se va a generar la señal que devuelve el hilo conductor tras ser excitado por el radar. Para ello hay que producir una señal de la forma:

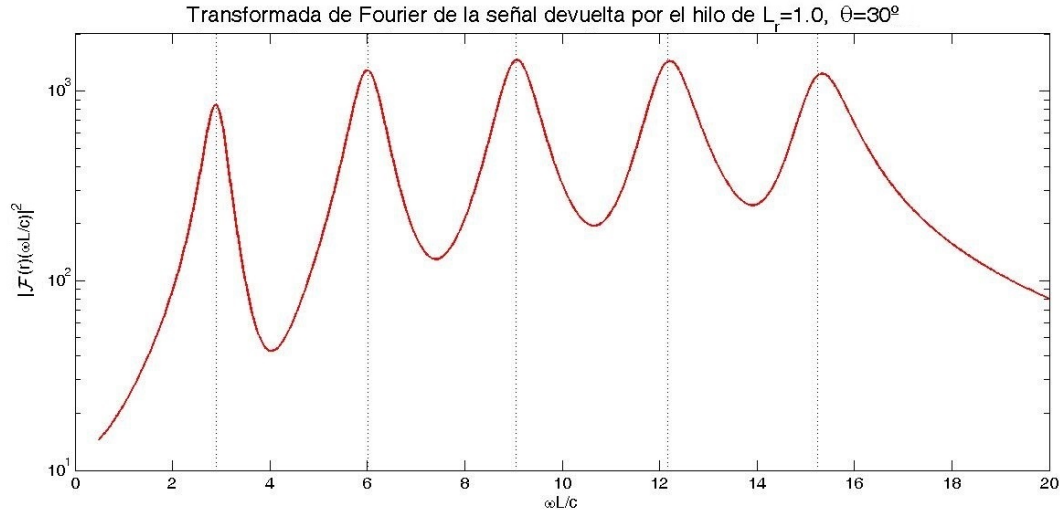
$$r^\theta(t) = \sum_{i=1}^5 A_i(\theta) \cdot e^{\sigma_i t + j(\omega_i t + \phi_i(\theta))}$$

Donde  $A_i(\theta)$  y  $\phi_i(\theta)$  son la amplitud y el desfase de la contribución a la respuesta del blanco debida a cada frecuencia normal, y dependen de la orientación. Se ha supuesto que la señal del radar con la que se ilumina el blanco tiene un ancho de banda donde solo se incluyen las 5 primeras frecuencias naturales. Se construye la respuesta para un ángulo  $\theta = 30^\circ$  entre la dirección del hilo y la dirección de propagación del pulso de radar incidente sobre él, dados las amplitudes y los desfases dependientes de  $\theta$  por el Método de Expansión en Singularidades [1]. La representación gráfica de esta señal es:



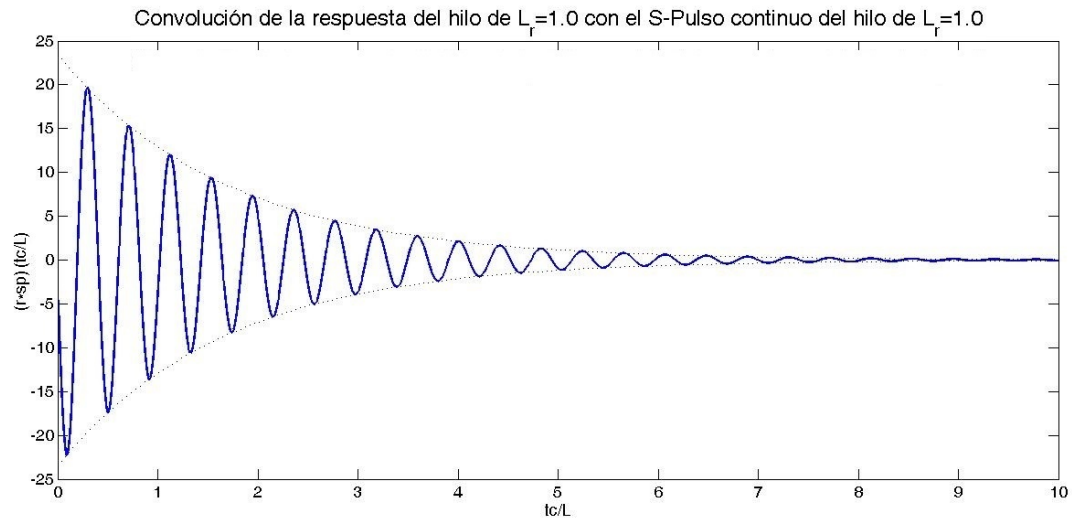
En esta gráfica  $r(t) \equiv r^{30^\circ}(t)$ . La parte de la señal que consiste en una suma de funciones armónicas amortiguadas es la posterior a la línea punteada (*late time*). El espectro de frecuencias de esta última parte se representa a continuación, y muestra las contribuciones de cada una de las cinco frecuencias naturales del hilo de longitud  $L$ , marcadas con la línea de puntos. Los valores de  $\omega$  para los que aparecen los máximos no dependen de la

orientación, pues son las frecuencias naturales del hilo, sin embargo las amplitudes y la altura de los máximos sí lo hacen.

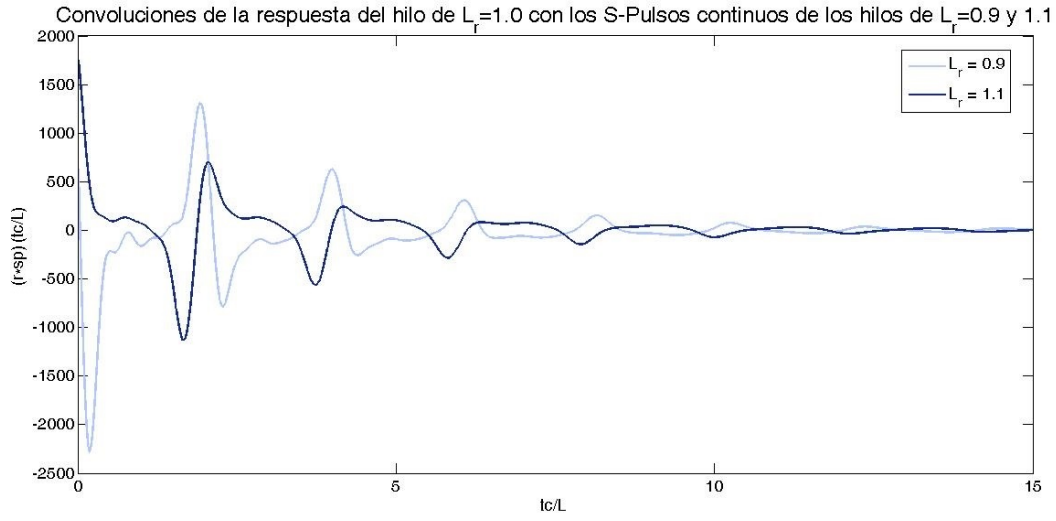


### 3.2 Convolución de la señal del hilo con los S-Pulsos

Es de esperar que al convolucionar el *late time* de la respuesta  $r(t)$  y un S-Pulso del hilo de  $L_r = 1.0$  quede como resultado la señal armónica amortiguada correspondiente a la única frecuencia natural del hilo cuya contribución no se ha extinguido con el S-Pulso,  $s_5 = (-0.1909 + 4.854i) \pi c/L$ . Se representa la convolución en el caso del S-Pulso continuo:



Efectivamente se obtiene una señal armónica amortiguada con un factor de amortiguación (línea de puntos dibujada en la gráfica) y una frecuencia de oscilación idénticos a los correspondientes a  $s_5$ . El periodo de oscilación esperado es  $2\pi/(4.854\pi) = 0.412$  en unidades  $c/L$ . Si se convolucionan la respuesta con el S-Pulso continuo correspondiente a los hilos de  $L_r = 0.9$  y  $L_r = 1.1$  se desea encontrar un resultado diferente. La representación de estas convoluciones se muestra a continuación.



Estas señales son irregulares, las cuatro frecuencias naturales  $s_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  no se han extinguido y lo que se observa es una superposición de las cinco frecuencias naturales del hilo. No debe pasar desapercibido que en las gráficas de las convoluciones  $(r * sp)(t)$  solo se representa la parte central de ellas, formada por los valores de  $t$  para los que el S-Pulso queda totalmente dentro de la señal. Se puede dividir el soporte de  $(r * sp)(t)$  en tres regiones, según el valor de  $t$ :

1. Región  $0 \leq t \leq T_{sp}$ :

$$(r * sp)(t) = \int_0^t r(\tau) \cdot sp(t - \tau)$$

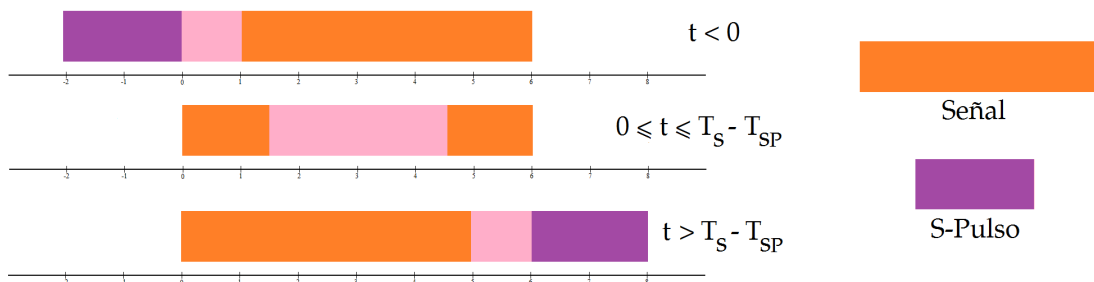
2. Parte central, región  $T_{sp} < t \leq T_s$ :

$$(r * sp)(t) = \int_{t-T_{sp}}^t r(\tau) \cdot sp(t - \tau)$$

3. Región  $T_s < t \leq T_s + T_{sp}$ :

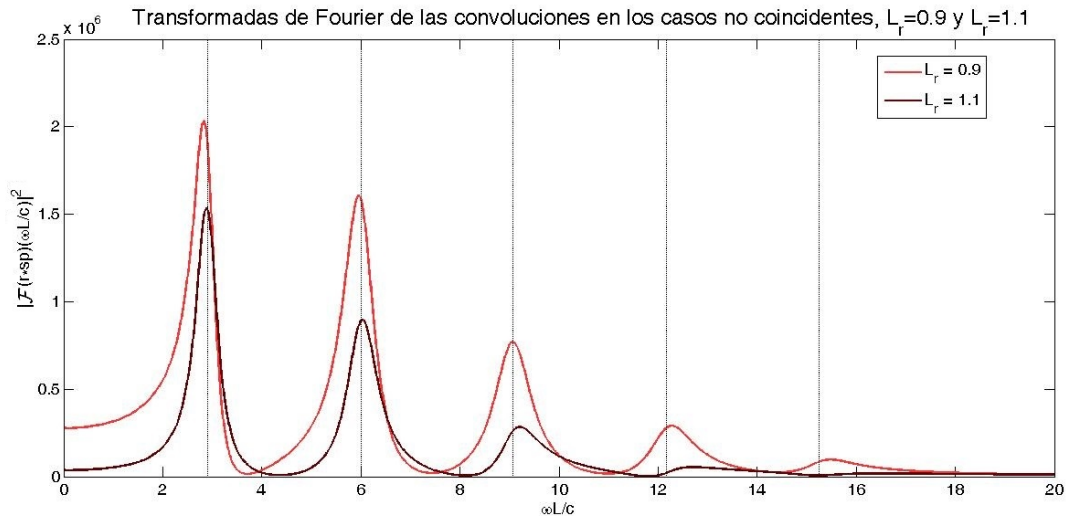
$$(r * sp)(t) = \int_{t-T_{sp}}^{T_s} r(\tau) \cdot sp(t - \tau)$$

donde  $T_s$  es la duración de la señal y  $T_{sp}$  la del S-Pulso. En las gráficas de convoluciones solo se representa la parte central, que es la región de interés. Si se toma el comienzo de esta región como  $t = 0$ , su instante final es  $T_s - T_{sp}$ . De esta forma:



Solo es significativa la parte central de la convolución porque es la única en la que está presente todo el S-Pulso y por tanto toda la información de las frecuencias naturales del blanco. Si no está presente toda la información, no se obtendrán los resultados buscados. La necesidad de seleccionar una región, la central, de la convolución se debe a que la señal y el S-Pulso son señales de duración finita. Interesa que esta región central sea lo más grande posible, para lo que es necesario que la longitud del S-Pulso sea lo más pequeña posible. Esta es la razón por la que se elige el valor de  $\tau$  más pequeño de entre todos los que anulan el determinante, acortándose así la duración del S-Pulso y alargándose la de la parte central de la convolución.

Para el caso de las convoluciones con los S-Pulsos continuos de los blancos no coincidentes con el blanco que devuelve la señal ( $L_r = 0.9$  y  $L_r = 1.1$ ), las transformadas de Fourier de las partes centrales de dichas convoluciones son:

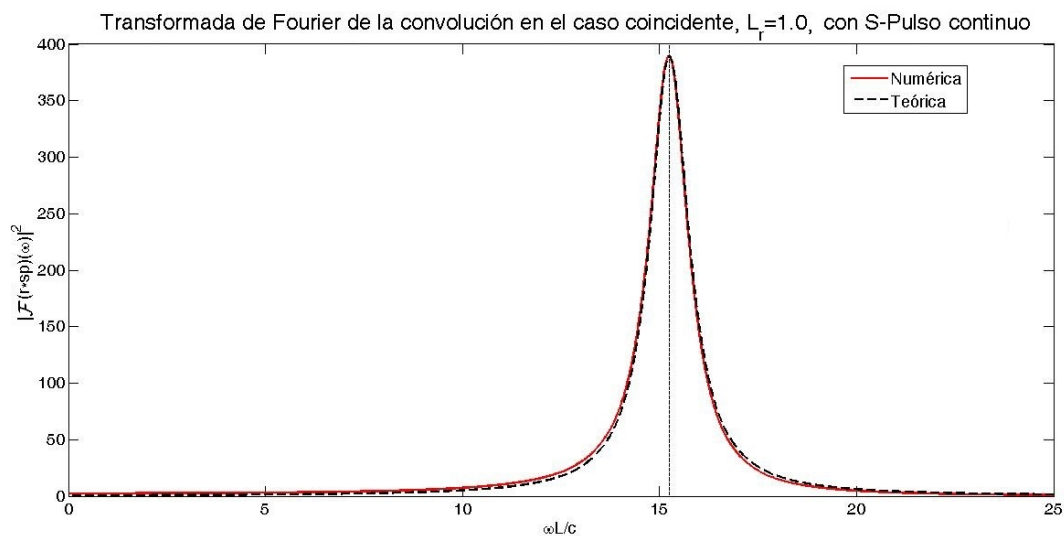


Estas transformadas de Fourier presentan picos cerca de las frecuencias naturales del hilo, como cabe esperar dado que están relacionadas con el producto de la  $TF$  de la señal devuelta por el hilo por la  $TF$  del S-Pulso. Como la amplitud de la  $TF$  del S-Pulso es decreciente con  $\omega$ , los máximos a baja frecuencia son mayores que a alta frecuencia. La  $TF$  de la parte central de la convolución con el S-Pulso del blanco coincidente se representa en la página siguiente.

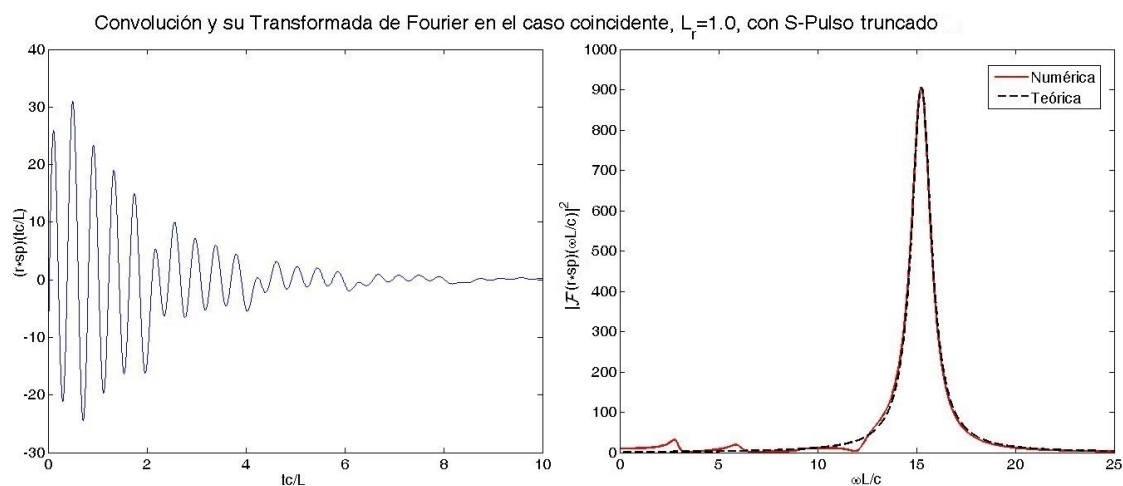
El ajuste es prácticamente total entre la curva numérica, obtenida al realizar la transformada de Fourier de los datos de la convolución, y la curva teórica esperada. Para obtener esta última curva [5]:

$$\mathcal{F}\{(sp * r)(t)\}(\omega) = B \cdot \int_0^{T_C} (e^{s_5 t}) e^{-j\omega t} dt = B \cdot \frac{[e^{(s_5 - j\omega)t}]_0^{T_C}}{s_5 - j\omega} = B \cdot \frac{[e^{(s_5 - j\omega)T_C} - 1]}{s_5 - j\omega}$$

Donde  $T_C$  es la duración del intervalo temporal en el que se integra la convolución  $(r * sp)(t)$ , y  $B$  es un factor multiplicativo que se ha escogido de forma que ambas curvas tomen el mismo valor máximo. Si se representa la convolución  $(r * sp)(t)$  y su  $TF$  para el S-Pulso discontinuo correspondiente a  $L_r = 1.0$ , el resultado es peor que el anterior,

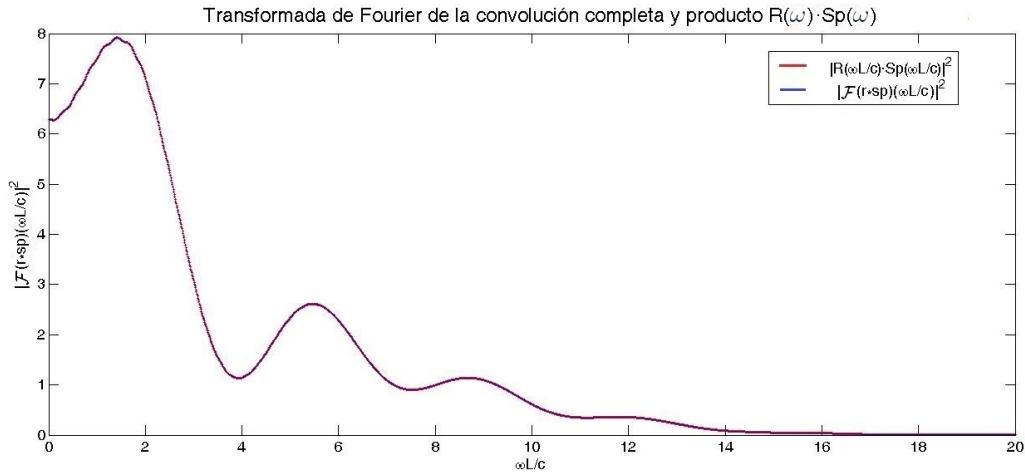


lo que permite anticipar que la capacidad discriminatoria del método será mejor con S-Pulsos continuos que con S-Pulsos truncados en este ejemplo.



Se va a resaltar un hecho que puede pasar desapercibido. En la introducción, al hablar sobre la *TF*, se dijo que la *TF* de la convolución  $(r * sp)(t)$  era el producto de las *TF*  $R(s)$  y  $Sp(s)$ . Sin embargo, en el caso de las *TF* que se acaban de representar esto no ocurre. La razón es sencilla: no se ha tomado toda la convolución, sino solo la parte útil (central) de ella. Si se toma la convolución entera, su *TF* y el producto de las *TF*  $R(s)$  y  $Sp(s)$  sí coinciden a la perfección. Para el S-Pulso continuo del hilo de  $L_r = 1.0$  se representan estas dos curvas en la página siguiente.

Ambas líneas están superpuestas completamente. Sin embargo, esta forma de trabajar no sirve para el esquema de discriminación planteado, debido a que esta *TF* no corresponde a la de una señal armónica amortiguada exponencialmente (lógico, pues la convolución entera no es una función de este tipo), y no sirve para discriminar positivamente al blanco. Por tanto, se ha llegado a la justificación de que es necesario realizar explícitamente la convolución, no podría simplificarse el esquema a realizar el producto  $R(s) \cdot Sp(s)$ , pues esto no funcionaría. Realizar la convolución explícitamente en el do-



minio del tiempo permite seleccionar la zona de interés, paso que no puede realizarse directamente en el dominio de la frecuencia.

### 3.3 Medida cuantitativa de la capacidad discriminatoria del método

Aquí comienza el estudio cuantitativo de la capacidad del método de los S-Pulsos para discriminar señales procedentes de distintos blancos. El primer paso es definir una magnitud que mida cómo se parece la transformada de Fourier de la convolución de la señal con un S-Pulso a la transformada de Fourier de la convolución esperada. Una magnitud adecuada es el Número de Discriminación de S-Pulso (*SDN*), que es el parámetro que sirve para identificar el blanco que ha mandado la señal: será aquel cuya convolución presente un *SDN* de menor valor, y se define [5]:

$$SDN = 1 - \left[ \int_{\omega_s}^{\omega_e} |C_s(\omega)| |F(\omega)| d\omega \right]^2 \cdot \left[ \int_{\omega_s}^{\omega_e} |C_s(\omega)|^2 d\omega \cdot \int_{\omega_s}^{\omega_e} |F(\omega)|^2 d\omega \right]^{-1}$$

Donde  $F(\omega)$  y  $C_s(\omega)$  son las transformadas de Fourier de la convolución medida y de la convolución teórica, respectivamente. Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\|f \cdot g\|^2 \leq \|f\|^2 \|g\|^2$$

Con  $f, g$  dos funciones cualesquiera del espacio de Hilbert. Además, la igualdad solo se alcanza si  $f$  y  $g$  son linealmente dependientes. En el caso de que  $f$  y  $g$  sean ortogonales, la norma del producto vale 0. Las funciones  $C_s(\omega)$  y  $F(\omega)$  pertenecen al conjunto de Hilbert formado por las funciones de  $L^2[\omega_s, \omega_e]$  que tienen como soporte el intervalo  $[\omega_s, \omega_e]$ , que es el intervalo de frecuencias en el que trabaja nuestro sistema de discriminación (en nuestro caso,  $\omega_s = 0$  y  $\omega_e = 25c/L$ , fuera de este intervalo la amplitud de la *TF* es prácticamente 0 en todos los casos tratados en este trabajo). En la definición de *SDN* aparece un cociente que valdrá, según lo dicho, 1 en el caso de que las dos funciones sean linealmente dependientes, y cero si son ortogonales. Este cociente es una medida de cuánto se parecen  $C_s(\omega)$  y  $F(\omega)$ . Por tanto, el *SDN* será más cercano a 0 cuanto más parecidas sean ambas funciones, y se alejará de este valor cuanto más distintas sean.

Los *SDN* obtenidos utilizando los S-Pulsos continuos son:



- Con el S-Pulso correspondiente al hilo con  $L_r = 0.9$ ,  $SDN_{0.9} = 0.8459$ .
- Con el S-Pulso correspondiente al hilo con  $L_r = 1.0$ ,  $SDN_{1.0} = 0.0071$ .
- Con el S-Pulso correspondiente al hilo con  $L_r = 1.1$ ,  $SDN_{1.1} = 0.8824$ .

Efectivamente el menor  $SDN$  obtenido corresponde al S-Pulso del hilo cuya señal es la que se ha convolucionado con cada S-Pulso, y la diferencia entre los valores de los casos no coincidentes y del caso coincidente es muy apreciable. Se utiliza otra magnitud, el Factor de Discriminación o *Discrimination Factor (DF)* [6], que es el promedio de la diferencia relativa entre el  $SDN$  mínimo (correspondiente al S-Pulso del blanco coincidente con el blanco problema) y cada uno de los  $SDN$  correspondientes a los S-Pulsos de los blancos no coincidentes. Si el mínimo  $SDN$  tiene lugar al utilizar el S-Pulso del blanco  $j$ :

$$DF = \frac{1}{N-1} \sum_{i \neq j, i=1}^N \frac{SDN_i - SDN_j}{SDN_i + SDN_j}$$

El valor de  $DF$  está comprendido entre 0 y 1, siendo más fácil la discriminación cuanto más cercano es  $DF$  a 1. Para el caso anterior:

$$DF = \frac{1}{2} \left[ \frac{SDN_{1.1} - SDN_{1.0}}{SDN_{1.1} + SDN_{1.0}} + \frac{SDN_{0.9} - SDN_{1.0}}{SDN_{0.9} + SDN_{1.0}} \right] = 0.9837$$

Si se realiza el mismo proceso con los S-Pulsos discontinuos, se obtienen:

- Con el S-Pulso correspondiente al hilo con  $L_r = 0.9$ ,  $SDN = 0.6436$ .
- Con el S-Pulso correspondiente al hilo con  $L_r = 1.0$ ,  $SDN = 0.0229$ .
- Con el S-Pulso correspondiente al hilo con  $L_r = 1.1$ ,  $SDN = 0.6680$ .

Y el factor de discriminación es  $DF = 0.9341$ . Como era de esperar, se ha conseguido mejor discriminación con el conjunto de S-Pulsos continuos. En lugar de obtener un S-Pulso que extinga la frecuencia natural  $s_5$  del hilo se puede obtener uno que extinga cualquier otra frecuencia natural. En las siguientes tablas se muestran los resultados ( $SDN$  y  $DF$ ) al extinguir cada una de las 5 frecuencias naturales del hilo dentro del ancho de banda del radar. Para los S-Pulsos continuos:

$s_i$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$
$SDN_{0.9}$	0.0064	0.0344	0.0605	0.1275	0.8459
$SDN_{1.0}$	0.0021	0.0031	0.0115	0.0040	0.0071
$SDN_{1.1}$	0.0181	0.0411	0.0967	0.1588	0.8824
$DF$	0.6544	0.8473	0.7341	0.9445	0.9837

Para los discontinuos:

$s_i$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$
$SDN_{0.9}$	0.0211	0.0422	0.1151	0.2662	0.6436
$SDN_{1.0}$	0.0070	0.0010	0.0116	0.00035	0.0229
$SDN_{1.1}$	0.0274	0.0418	0.1203	0.2001	0.6680
$DF$	0.5482	0.9535	0.8206	0.9970	0.9341

En dos ocasiones se obtiene una mejor discriminación con el S-Pulso continuo y en tres

con el discontinuo. Esto indica que no hay un tipo de S-Pulsos que discrimine mejor que el otro en todos los casos, sino que dependerá de varias variables, como la frecuencia natural no extinguida. Se estudiará el comportamiento del sistema con respecto a algunas variables (el nivel de ruido y el ángulo que forma el hilo respecto a la dirección del pulso incidente) en las siguientes secciones. Por otro lado, se concluye a partir de estos resultados que la discriminación es mejor cuando se extinguen las frecuencias más bajas, dejando sin extinguir alguna de las más altas. Recordando las representaciones de los módulos al cuadrado de las  $TF$  de los S-Pulsos, que decrecían con  $\omega$ , se tiene la explicación de este hecho.

Cuando se deja sin extinguir  $s_1$ , la frecuencia natural más pequeña, el módulo de la  $TF$  del S-Pulso en ese punto es mucho mayor que los valores que toma el módulo a frecuencias más altas, independientemente de si éstas están extinguidas (se ha utilizado el S-Pulso correspondiente al blanco correcto que presenta un mínimo en dichas frecuencias) o no (se ha utilizado un S-Pulso que no presenta un mínimo en ellas). Este razonamiento es válido aunque la  $TF$  de la convolución no sea exactamente igual al producto de  $Sp(s)$  y  $R(s)$ . Entonces, en la convolución está presente una componente muy grande en la frecuencia natural  $s_1$  en comparación con las demás componentes (aunque estas no hayan sido extinguidas, es decir, aunque  $|Sp(s)|$  no presente un mínimo en ellas), por lo que dicha convolución es muy parecida a una onda armónica amortiguada con frecuencia compleja  $s_1$ , y al compararla con la función teórica correspondiente se obtiene un  $SDN$  muy cercano a 0 con los tres S-Pulsos.

Un valor más alto del  $DF$  implica valores del  $SDN$  más distintos entre los blancos incorrectos y el blanco correcto. El interés en el estudio del  $DF$  de cada sistema de discriminación (de cada conjunto de S-Pulsos, uno para cada hilo), se debe a que se espera que para mayor  $DF$  el esquema presente mejor comportamiento en ambientes ruidosos, lo que significa que permita identificar el blanco correcto a mayores niveles de ruido. Esto es el objetivo último de un sistema de discriminación y es lo que se tratará de estudiar al final del trabajo.

## 4 Construcción de S-Pulsos sobre $\beta$ -splines exponenciales

A partir de ahora se utilizará otro conjunto de funciones base para el desarrollo de los S-Pulsos. Se trata de los  $\beta$ -splines exponenciales. Estas funciones poseen parámetros libres, cuyo valor no queda establecido al resolver el sistema de ecuaciones en la construcción del S-Pulso, que pueden por tanto ser modificados hasta lograr una discriminación óptima. Esta característica no está presente en el conjunto de funciones base de los  $\beta$ -splines polinómicos utilizado hasta aquí [6].

### 4.1 Obtención de los $\beta$ -splines exponenciales de menor orden

Matemáticamente, los  $\beta$ -splines exponenciales son funciones  $\beta_{\vec{\alpha}}^l(t)$  dependientes de un vector de parámetros complejos  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l)$ . Para estudiarlos conviene partir del operador diferencial  $L_{\vec{\alpha}}$  de orden  $l$ , que verifica que las  $l$  raíces de su polinomio característico son  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ . Entonces puede expresarse el operador  $L_{\vec{\alpha}}$  como convolución de

operadores diferenciales de primer orden [8]:

$$\begin{aligned} L_{\vec{\alpha}} \{f(t)\} &= \left\{ \frac{d^{(l)}}{dt^{(l)}} + a_{l-1} \frac{d^{(l-1)}}{dt^{(l-1)}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0 I \right\} f(t) = \\ &= \left( \frac{d}{dt} - \alpha_1 I \right) * \left( \frac{d}{dt} - \alpha_2 I \right) * \cdots * \left( \frac{d}{dt} - \alpha_l I \right) f(t) \end{aligned}$$

El  $\beta$ -spline exponencial de orden  $l = 1$  es una función con soporte  $[0, 1]$ , definida:

$$\beta_{\alpha}^1(t) = \begin{cases} e^{\alpha t}, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

que verifica la ecuación diferencial

$$L_{\alpha} \left\{ \beta_{\alpha}^1(t) \right\} = 0$$

en todos los puntos excepto en  $t = 0$  y en  $t = 1$ , donde ni siquiera es derivable. Al igual que en el caso de los  $\beta$ -splines polinómicos, los  $\beta$ -splines exponenciales se construyen de forma recursiva mediante convolución:

$$\beta_{\vec{\alpha}}^l(t) = \left( \beta_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{l-1})}^{l-1} * \beta_{\alpha_l}^1 \right)(t) = \left( \beta_{\alpha_1}^1 * \beta_{\alpha_2}^1 * \cdots * \beta_{\alpha_l}^1 \right)(t)$$

El  $\beta$ -spline exponencial de orden  $l$  tendrá soporte  $[0, l]$  y será solución de la ecuación diferencial

$$L_{\vec{\alpha}} \left\{ \beta_{\vec{\alpha}}^l(t) \right\} = 0$$

en todos los puntos excepto en  $t = 0, t = 1, \dots, t = l - 1$  y  $t = l$ , donde ni siquiera es derivable  $l$  veces. Para construir el  $\beta$ -spline exponencial de orden 2:

$$\beta_{\alpha_1, \alpha_2}^2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_{\alpha_1}^1(\tau) \cdot \beta_{\alpha_2}^1(t - \tau) \cdot d\tau$$

El soporte de  $\beta_{\alpha_1, \alpha_2}^2(t)$  está formado por el intervalo de  $t$  donde la convolución no es nula,  $t \in [0, 2]$ . Para realizar la integral, hay que tener en cuenta dos tramos,  $t \in [0, 1]$  y  $t \in (1, 2]$ . Además, el proceso de integración es distinto si  $\alpha_1 = \alpha_2 \equiv \alpha$  que si  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ . En el primer caso, en  $t \in [0, 1]$ :

$$\beta_{\alpha, \alpha}^2(t) = \int_0^t \beta_{\alpha}^1(\tau) \cdot \beta_{\alpha}^1(t - \tau) \cdot d\tau = \int_0^t e^{\alpha \tau} \cdot e^{\alpha(t - \tau)} \cdot d\tau = t e^{\alpha t}$$

En  $t \in (1, 2]$ :

$$\beta_{\alpha, \alpha}^2(t) = \int_{t-1}^1 \beta_{\alpha}^1(\tau) \cdot \beta_{\alpha}^1(t - \tau) \cdot d\tau = \int_{t-1}^1 e^{\alpha \tau} \cdot e^{\alpha(t - \tau)} \cdot d\tau = (2 - t) e^{\alpha t}$$

Luego:

$$\beta_{\alpha, \alpha}^2(t) = \begin{cases} t e^{\alpha t}, & 0 \leq t < 1 \\ (2 - t) e^{\alpha t}, & 1 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En el segundo caso, y para  $t \in [0, 1]$ :

$$\begin{aligned}\beta_{\alpha_1, \alpha_2}^2(t) &= \int_0^t \beta_{\alpha_1}^1(\tau) \cdot \beta_{\alpha_2}^1(t - \tau) \cdot d\tau = \int_0^t e^{\alpha_1 \tau} \cdot e^{\alpha_2(t - \tau)} \cdot d\tau = e^{\alpha_2 t} \cdot \int_0^t e^{(\alpha_1 - \alpha_2)\tau} \cdot d\tau = \\ &= \frac{e^{\alpha_2 t} \cdot \left[ e^{(\alpha_1 - \alpha_2)\tau} \right]_0^t}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{e^{\alpha_2 t} \cdot \left[ e^{(\alpha_1 - \alpha_2)t} - 1 \right]}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}}{\alpha_1 - \alpha_2}\end{aligned}$$

Para  $t \in (1, 2]$ :

$$\begin{aligned}\beta_{\alpha_1, \alpha_2}^2(t) &= \int_{t-1}^1 \beta_{\alpha_1}^1(\tau) \cdot \beta_{\alpha_2}^1(t - \tau) \cdot d\tau = \int_{t-1}^1 e^{\alpha_1 \tau} \cdot e^{\alpha_2(t - \tau)} \cdot d\tau = e^{\alpha_2 t} \cdot \int_{t-1}^1 e^{(\alpha_1 - \alpha_2)\tau} \cdot d\tau = \\ &= \frac{e^{\alpha_2 t} \cdot \left[ e^{(\alpha_1 - \alpha_2)\tau} \right]_{t-1}^1}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{e^{\alpha_2 t} \cdot \left[ e^{(\alpha_1 - \alpha_2)} - e^{(\alpha_1 - \alpha_2)(t-1)} \right]}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{e^{\alpha_1 + \alpha_2(t-1)} - e^{\alpha_1(t-1) + \alpha_2}}{\alpha_1 - \alpha_2}\end{aligned}$$

Luego la expresión del  $\beta$ -spline exponencial de orden 2 con  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  es:

$$\beta_{\alpha_1, \alpha_2}^2(t) = \begin{cases} \frac{e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}}{\alpha_1 - \alpha_2}, & 0 \leq t < 1 \\ \frac{e^{\alpha_1 + \alpha_2(t-1)} - e^{\alpha_1(t-1) + \alpha_2}}{\alpha_1 - \alpha_2}, & 1 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En el límite  $\alpha_2 \rightarrow \alpha_1$  se recupera la expresión para  $\alpha_1 = \alpha_2 \equiv \alpha$ . Se observa que el  $\beta$ -spline exponencial es invariante frente a la permutación de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ . Este resultado es general, todos los  $\beta$ -splines exponenciales independientemente de su orden son invariantes frente a una permutación de los coeficientes  $\alpha_i$ . Para el  $\beta$ -spline exponencial de orden 3, el soporte es  $t \in [0, 3]$ , y habrá que distinguir 3 casos,  $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 \neq \alpha_1$ ,  $\alpha_1 = \alpha_3 \neq \alpha_2$  y  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ . En cada caso hay que tratar con 3 intervalos. Se muestran directamente las expresiones analíticas. Para el caso  $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 \neq \alpha_1$ :

$$\beta_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}^3(t) = \begin{cases} \frac{(\alpha_3 - \alpha_2)e^{\alpha_1 t} + (\alpha_1 - \alpha_3)e^{\alpha_2 t} + (\alpha_2 - \alpha_1)e^{\alpha_3 t}}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1)}, & 0 \leq t < 1 \\ \frac{e^{\alpha_1(t-1)}(e^{\alpha_3} + e^{\alpha_2})}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)} + \frac{e^{\alpha_2(t-1)}(e^{\alpha_3} + e^{\alpha_1})}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)} + \frac{e^{\alpha_3(t-1)}(e^{\alpha_1} + e^{\alpha_2})}{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1)}, & 1 \leq t < 2 \\ \frac{e^{\alpha_1(t-2)} + e^{\alpha_2} + e^{\alpha_3}}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} + \frac{e^{\alpha_2(t-2)} + e^{\alpha_1} + e^{\alpha_3}}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)} + \frac{e^{\alpha_3(t-2)} + e^{\alpha_1} + e^{\alpha_2}}{(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)}, & 2 \leq t \leq 3 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

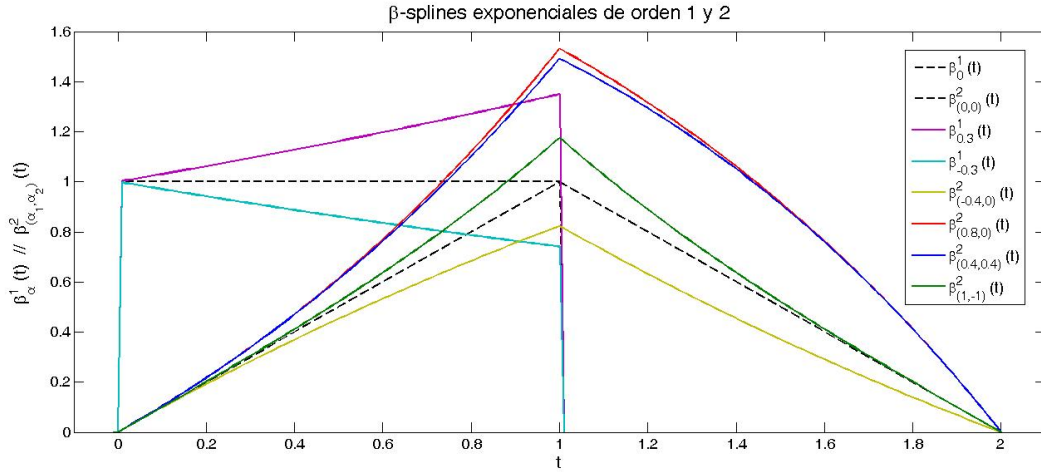
Para el caso  $\alpha_1 = \alpha_3 \neq \alpha_2$ :

$$\beta_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1}^3(t) = \begin{cases} \frac{e^{\alpha_1 t}}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2} ((\alpha_1 - \alpha_2)t - 1) + \frac{e^{\alpha_2 t}}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}, & 0 \leq t < 1 \\ \frac{e^{\alpha_1 t} ((1 + e^{\alpha_2 - \alpha_1})(1 - (\alpha_1 - \alpha_2)(t - 1)) + \alpha_1 - \alpha_2)}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2} - \frac{2e^{\alpha_1 + \alpha_2(t-1)}}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}, & 1 \leq t < 2 \\ \frac{e^{\alpha_1(t-1)} + e^{\alpha_2}}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2} ((\alpha_1 - \alpha_2)(t - 3) - 1) + \frac{e^{2\alpha_1 + \alpha_2(t-2)}}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}, & 2 \leq t \leq 3 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para el caso  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \equiv \alpha$ :

$$\beta_{\alpha, \alpha, \alpha}^3(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} e^{\alpha t}, & 0 \leq t < 1 \\ (3t - t^2 - \frac{3}{2}) e^{\alpha t}, & 1 \leq t < 2 \\ (\frac{9}{2} - 3t + \frac{t^2}{2}) e^{\alpha t}, & 2 \leq t \leq 3 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En todos los casos, con  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_l = 0$ , se recuperan los  $\beta$ -splines polinómicos. Se representan algunos  $\beta$ -splines exponenciales de orden 1 y 2 en la siguiente gráfica.



#### 4.2 Optimización sobre $\beta$ -splines exponenciales de orden 1

A continuación se construirán S-Pulsos para los mismos hilos que en los casos anteriores, utilizando como funciones base  $\beta$ -splines exponenciales de orden 1. Para orden 1 los S-Pulsos continuos y los truncados son iguales. La expansión tendrá la forma:

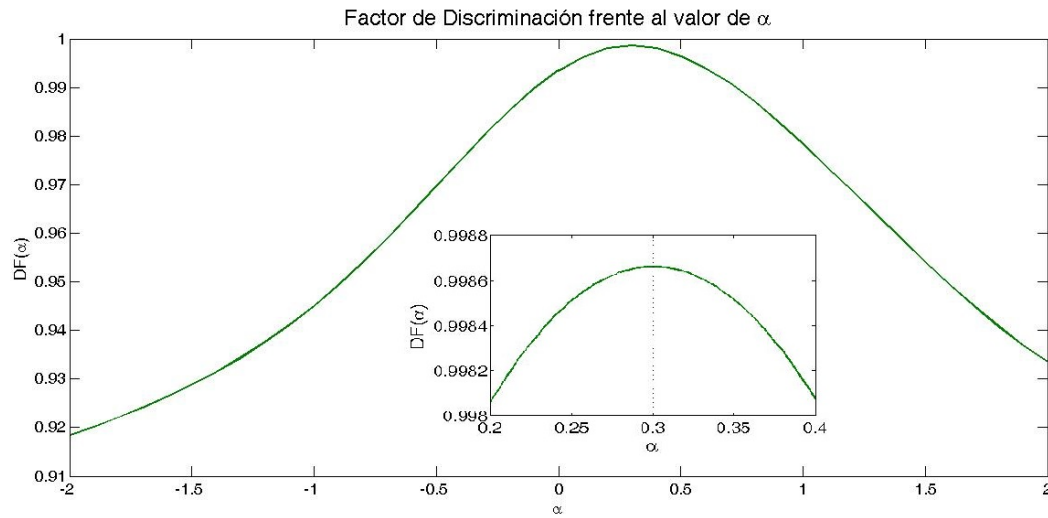
$$sp(t) = \sum_{r=0}^{n-1} C_r \cdot \beta_{\alpha}^1\left(\frac{t}{\tau} - r\right)$$

Dado que se quieren anular 4 frecuencias naturales del hilo, junto con los valores complejo conjugados, se tienen  $2 \cdot (m - 1) = 8$  ecuaciones, y al ser el número de incógnitas  $n$ , el valor de  $n$  para el S-Pulso natural es  $n = 8$ . Las ecuaciones que resultan al imponer contenido energético nulo del S-Pulso en las frecuencias naturales del blanco, es decir, transformada de Laplace del S-Pulso nula en las frecuencias naturales y en sus complejo conjugadas, son:

$$\begin{aligned} Sp(s_j) &= \sum_{r=0}^7 C_r \cdot \mathcal{L}\left\{\beta_{\alpha}^1\left(\frac{t}{\tau} - r\right)\right\}(s_j) = 0 \implies \sum_{r=0}^7 C_r \cdot \int_0^n \beta_{\alpha}^1(t-r) \cdot e^{-s_j t \tau} \cdot dt = 0 \implies \\ &\implies \sum_{r=0}^7 C_r \cdot \int_0^1 e^{\alpha t} \cdot e^{-s_j(t+r)\tau} \cdot dt = 0 \implies \sum_{r=0}^7 C_r \cdot e^{-s_j r \tau} \left[ \frac{e^{\alpha - s_j \tau}}{\alpha - s_j \tau} \right]_0^1 = 0 \implies \sum_{r=0}^7 C_r \cdot e^{-s_j r \tau} = 0 \end{aligned}$$

Las frecuencias complejo conjugadas de las naturales,  $s_j^*$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , también deben verificar la ecuación anterior. El sistema ha quedado totalmente reducido al mismo que en el caso de los  $\beta$ -splines polinómicos, por lo que su resolución es análoga al caso anterior (búsqueda del menor valor de  $\tau$  que anula el determinante de la matriz de coeficientes y obtención de los  $C_r$ ). Cambiará la construcción del S-Pulso una vez obtenidos estos coeficientes. Construyendo los S-Pulsos correspondientes a la extinción de la frecuencia natural  $s_5$  de los hilos de  $L_r = 0.9, 1.0$  y  $1.1$ , convolucionándolos con la respuesta que proporciona el hilo de  $L_r = 1.0$  y calculando el  $DF$  para cada valor de  $\alpha$  se obtiene la gráfica de la página siguiente.

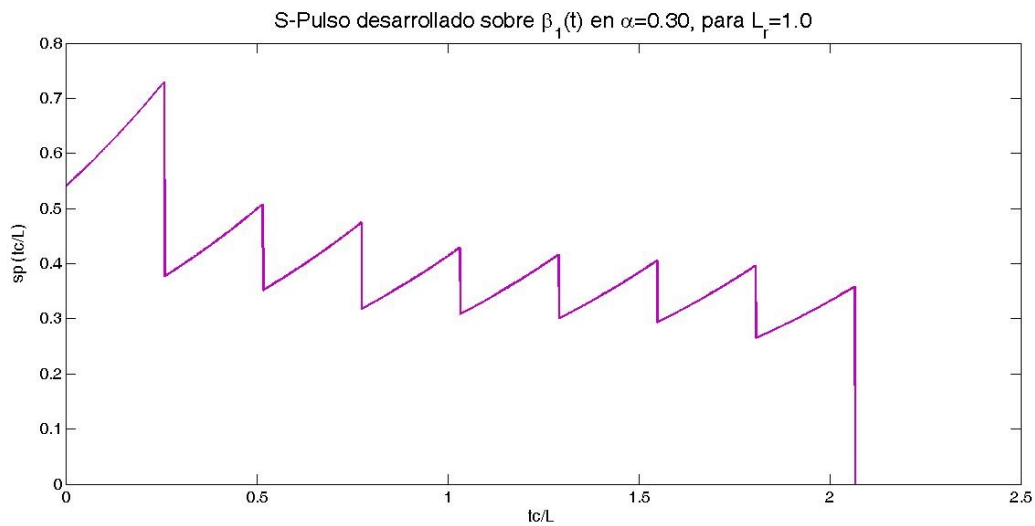
Se alcanza un máximo de  $DF$  cerca de  $\alpha = 0$ , valor que corresponde al desarrollo de los S-Pulsos en  $\beta$ -splines polinómicos. En concreto, el máximo se alcanza en  $\alpha_0 = 0.30 \pm 0.01$ ,



y vale  $DF(\alpha_0) = 0.9987$ . Los  $SDN$  obtenidos al convolucionar cada S-Pulso construido con este valor  $\alpha_0$  son:

- Con el S-Pulso correspondiente al hilo con  $L_r = 0.9$ ,  $SDN_{0.9} = 0.6649$ .
- Con el S-Pulso correspondiente al hilo con  $L_r = 1.0$ ,  $SDN_{1.0} = 4.43 \cdot 10^{-4}$ .
- Con el S-Pulso correspondiente al hilo con  $L_r = 1.1$ ,  $SDN_{1.1} = 0.6606$ .

La representación del S-Pulso construido de esta manera para  $L_r = 1.0$  es:



Esta optimización en el parámetro  $\alpha$  se puede realizar extinguiendo cada una de las frecuencias naturales del blanco. Si se extinguen cada una de estas frecuencias, el valor  $\alpha_0$  óptimo y el máximo de  $DF$  en cada caso se muestran en la tabla:

$s_i$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$
$\alpha_0$	-7.42	0.42	6.60	-1.58	0.30
$DF$	0.9147	0.9609	0.9914	0.9964	0.9987

El mejor resultado se alcanza optimizando el S-Pulso que no extingue la frecuencia na-

tural más alta.

### 4.3 Optimización sobre $\beta$ -splines exponenciales continuos de orden 2

Ahora se desarrollará el S-Pulso sobre  $\beta$ -splines exponenciales de orden 2,  $\beta_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2(t)$ . En este caso sí hay posibilidad de escoger entre trabajar con  $\beta$ -splines exponenciales continuos y truncados. Se va a razonar con qué tipo de  $\beta$ -splines exponenciales es más fácil el trabajo. Con S-Pulso continuo el desarrollo será

$$sp(t) = \sum_{r=0}^{n-2} C_r \cdot \beta_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2\left(\frac{t}{\tau} - r\right)$$

Y con S-Pulso truncado,

$$sp(t) = \begin{cases} \sum_{r=-1}^{n-1} C_r \cdot \beta_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2\left(\frac{t}{\tau} - r\right), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para que haya el mismo número de ecuaciones (8) que de incógnitas, se requiere en el primer caso  $n = 9$ , y en el segundo,  $n = 7$ . El sistema de ecuaciones queda:

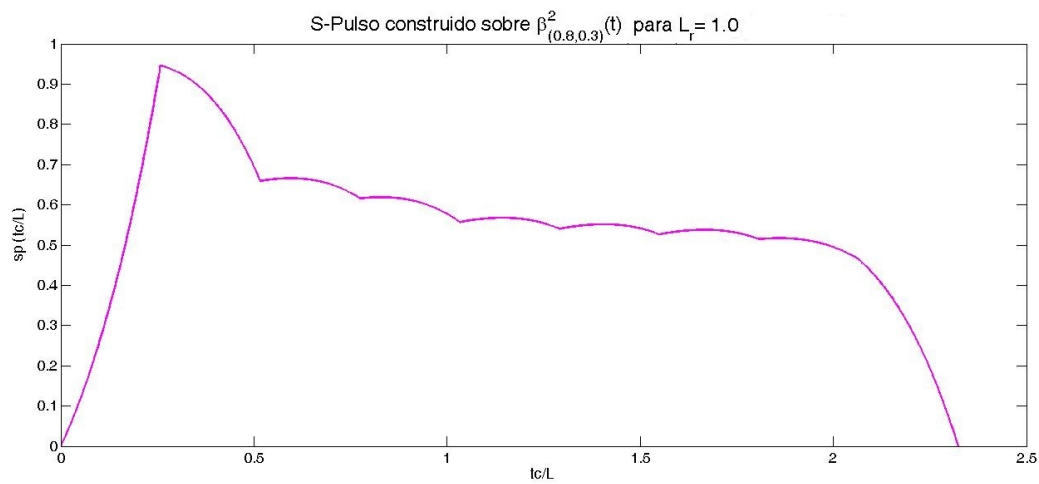
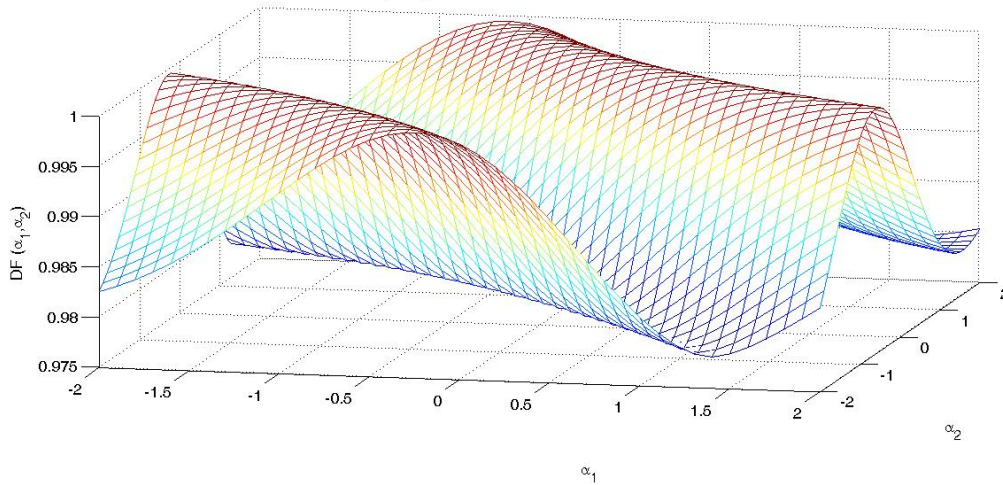
$$\begin{aligned} Sp(s_i) &= \sum_{r=0}^7 C_r \cdot \int_0^n \beta_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2(t - r) \cdot e^{-s_i t \tau} \cdot dt = 0 \implies \\ &\implies \sum_{r=0}^7 C_r \cdot \int_{-r}^{n-r} e^{\alpha t} \cdot e^{-s_i(t+r)\tau} \cdot dt = 0 \end{aligned}$$

Para el S-Pulso continuo, se cumplen  $-r \leq 0$  y  $n - r \geq 2$ , lo que hace que todas las integrales de la ecuación de arriba puedan simplificarse quedando el sistema igual que en el caso de orden 1:

$$\sum_{r=0}^7 C_r \cdot e^{-s_i r \tau} = 0$$

Sin embargo, para el S-Pulso truncado hay dos valores de  $r$  para los que esto no se cumple,  $r = -1$  y  $r = n - 1$ . Para ambos casos deben calcularse explícitamente las integrales y resolver un sistema de ecuaciones diferente en cada iteración del proceso de optimización, puesto que la matriz de coeficientes del sistema que debe resolverse para obtener los coeficientes  $C_r$  depende de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ . Ahí está el principal inconveniente de la utilización de S-Pulsos truncados, y la mayor ventaja que proporcionan los S-Pulsos continuos propuestos en este Trabajo de Fin de Grado. A continuación se optimiza el valor de  $DF$  empleando  $\beta$ -splines exponenciales de orden 2 continuos. En la página siguiente se representa la superficie  $DF = DF(\alpha_1, \alpha_2)$  en el intervalo  $x \in [-2, 2]$ ,  $y \in [-2, 2]$ .

En la gráfica se observan dos zonas donde la función  $DF(\alpha_1, \alpha_2)$  presenta un valor máximo. Si se realiza la representación para un intervalo de valores de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  más amplio, se encuentra que ambas regiones se extienden mucho más lejos, pero sin alcanzarse valores de  $DF$  superiores al máximo absoluto en el intervalo de representación, que es igual a 0.9994. Se escoge uno de los puntos donde se alcanza el  $DF$  máximo, por ejemplo el más cercano a  $(0, 0)$ , que es  $(0.3, 0.8)$ , para obtener el S-Pulso correspondiente a dichos valores de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ . La representación de este S-Pulso se muestra en la página siguiente.

Factor de Discriminación en función de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  para S-Pulsos construidos sobre  $\beta$ -splines exponenciales de orden 2

Se obtiene un S-Pulso de aspecto parecido a los construidos sobre  $\beta$ -splines polinómicos, alcanzando un máximo rápido y al decreciendo después, con una caída rápida al final.

## 5 Identificación de blancos en presencia de ruido

### 5.1 Simulación del ruido

El ruido es una perturbación  $\delta(t)$  de carácter aleatorio que se superpone a la señal del hilo. La simulación del ruido es equivalente a la generación de un fondo de números aleatorios que se suma a la señal pura  $r_0(t)$ . Los números aleatorios serán generados siguiendo una distribución normal centrada en 0:

$$\delta(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

La varianza  $\sigma^2$  de esta distribución está relacionada con el nivel de ruido. Para caracterizar el nivel de ruido que afecta a la señal del hilo se define la magnitud *SNR* (*Signal to*



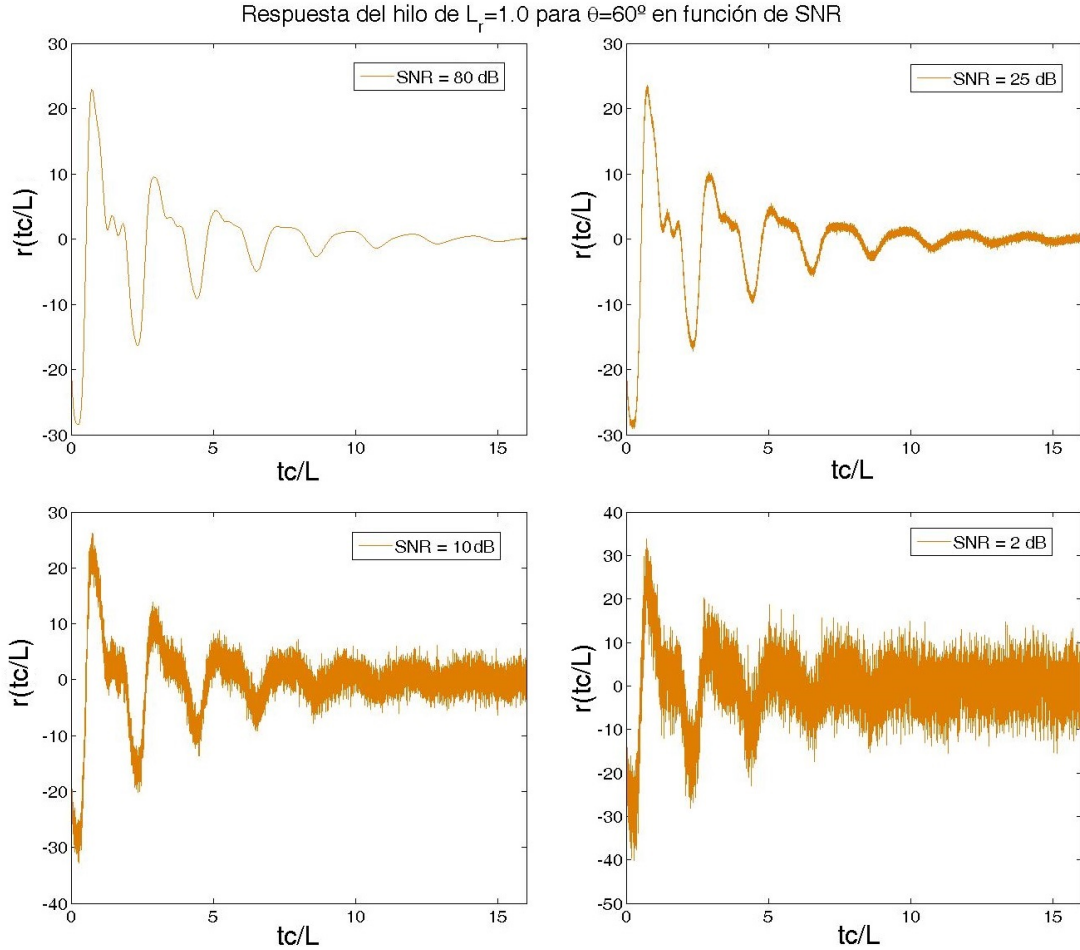
Noise Ratio) [5], que es el cociente entre la intensidad de la señal libre de ruido,  $r_0(t)$ , y la intensidad del ruido, expresado en decibelios:

$$SNR (dB) = 10 \cdot \log_{10} \left\{ \frac{\int_0^{T_C} r_0(t)^2 dt}{\int_0^{T_C} \delta(t)^2 dt} \right\} = 10 \cdot \log_{10} \left\{ \frac{\int_0^{T_C} r_0(t)^2 dt}{\sigma^2 T_C} \right\}$$

Si  $SNR = 0$ , la intensidad del ruido iguala a la de la señal pura. Para expresar la varianza de la distribución normal que han de seguir los datos de ruido:

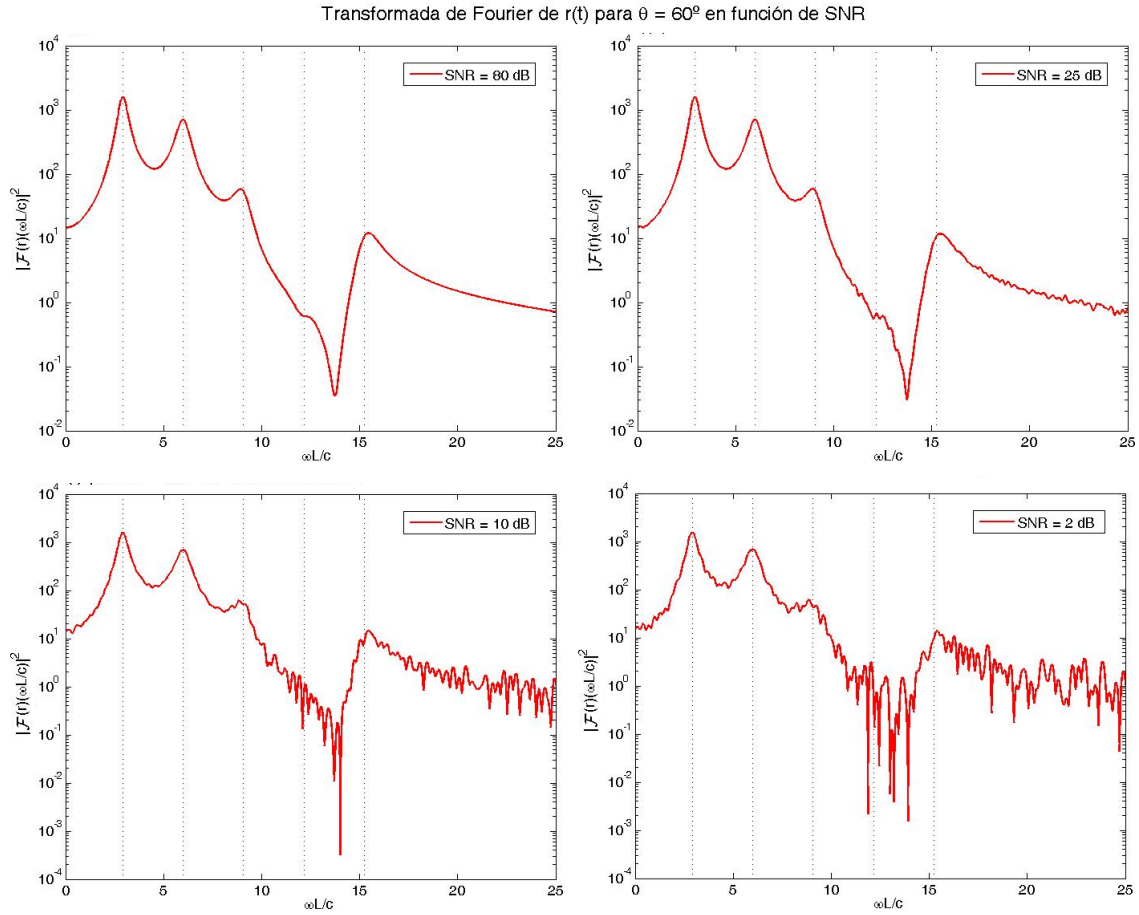
$$\sigma^2 = \frac{\int_0^{T_C} r_0(t)^2 dt}{T_C} \cdot 10^{-\frac{SNR}{10}}$$

Para generar el ruido se ha de partir de la distribución normal centrada en 0 con varianza  $\sigma^2 = 1$ . Después se multiplican todos los datos de ruido por  $\sigma$  para obtener la distribución deseada. Se representan a continuación las señales  $r(t) = r_0(t) + \delta(t)$  del hilo para  $\theta = 60^\circ$  y varios valores de  $SNR$ . En la página siguiente se muestran sus transformadas de Fourier.



## 5.2 Probabilidad de acierto según el nivel de ruido

En esta última parte del trabajo se investiga qué tipo de S-Pulsos de los obtenidos hasta ahora es el que proporciona mejores resultados cuando la discriminación del blanco se



realiza en presencia de ruido. Se van a utilizar 4 sistemas de discriminación, formado cada uno por 3 S-Pulsos (uno para cada hilo). Los sistemas son:

1. Sistema 1, formado por los S-Pulsos continuos contruidos sobre  $\beta$ -splines polinómicos de orden 3 que dejan sin extinguir la frecuencia natural  $s_5$  de cada hilo.
2. Sistema 2, formado por los S-Pulsos truncados contruidos sobre  $\beta$ -splines polinómicos de orden 3 que dejan sin extinguir la frecuencia natural  $s_4$  de cada hilo.
3. Sistema 3, formado por los S-Pulsos contruidos sobre  $\beta$ -splines exponenciales de orden 1, con  $\alpha_0 = 0.30$ , que dejan sin extinguir la frecuencia natural  $s_5$  de cada hilo.
4. Sistema 4, formado por los S-Pulsos continuos contruidos sobre  $\beta$ -splines exponenciales de orden 2, con  $(\alpha_{10}, \alpha_{20}) = (0.3, 0.8)$  que dejan sin extinguir la frecuencia natural  $s_5$  de cada hilo.

Se pretende evaluar cuál es la probabilidad de acierto para cada conjunto de S-Pulsos en función del nivel de ruido, caracterizado por  $SNR$ . El estudio se realiza para distintas orientaciones del hilo conductor. Se realizan 100 discriminaciones para cada par de valores de  $\theta$  y  $SNR$ . En la siguiente tabla se muestra el número de aciertos a la hora de discriminar el blanco conductor que ha generado la señal que se convoluciona con los 3 S-Pulsos, es decir, el número de veces que la  $TF$  de la convolución de la señal con el S-Pulso correspondiente al hilo de  $L_r = 1.0$  presenta el menor  $SDN$ .

$0^\circ$ — $SNR$ (dB)	60	30	20	16	12	8	4
Sistema 1	100	98	9	3	0	0	0
Sistema 2	100	100	39	13	4	0	0
Sistema 3	100	100	95	86	41	5	0
Sistema 4	100	100	95	61	16	6	0
$15^\circ$ — $SNR$ (dB)	60	30	20	16	12	8	4
Sistema 1	100	100	95	69	45	12	8
Sistema 2	100	100	55	21	11	4	0
Sistema 3	100	100	100	100	100	79	56
Sistema 4	100	100	100	96	82	41	25
$30^\circ$ — $SNR$ (dB)	60	30	20	16	12	8	4
Sistema 1	100	100	84	57	33	16	3
Sistema 2	100	100	52	17	8	4	0
Sistema 3	100	100	100	100	100	91	58
Sistema 4	100	100	96	84	50	27	6
$45^\circ$ — $SNR$ (dB)	60	30	20	16	12	8	4
Sistema 1	23	5	0	0	0	0	0
Sistema 2	100	49	15	7	2	0	0
Sistema 3	100	99	89	61	30	18	6
Sistema 4	100	77	52	28	12	5	0
$60^\circ$ — $SNR$ (dB)	60	30	20	16	12	8	4
Sistema 1	95	63	44	23	19	6	6
Sistema 2	100	100	98	82	85	85	81
Sistema 3	100	100	100	100	100	97	93
Sistema 4	100	96	91	72	52	27	21
$75^\circ$ — $SNR$ (dB)	60	30	20	16	12	8	4
Sistema 1	38	18	19	17	7	16	15
Sistema 2	100	89	86	82	71	73	68
Sistema 3	95	95	90	88	81	73	73
Sistema 4	74	62	60	56	42	38	40

Este estudio es el objetivo fundamental de este Trabajo de Fin de Grado, y su análisis se realiza en la siguiente sección.

## 6 Conclusiones

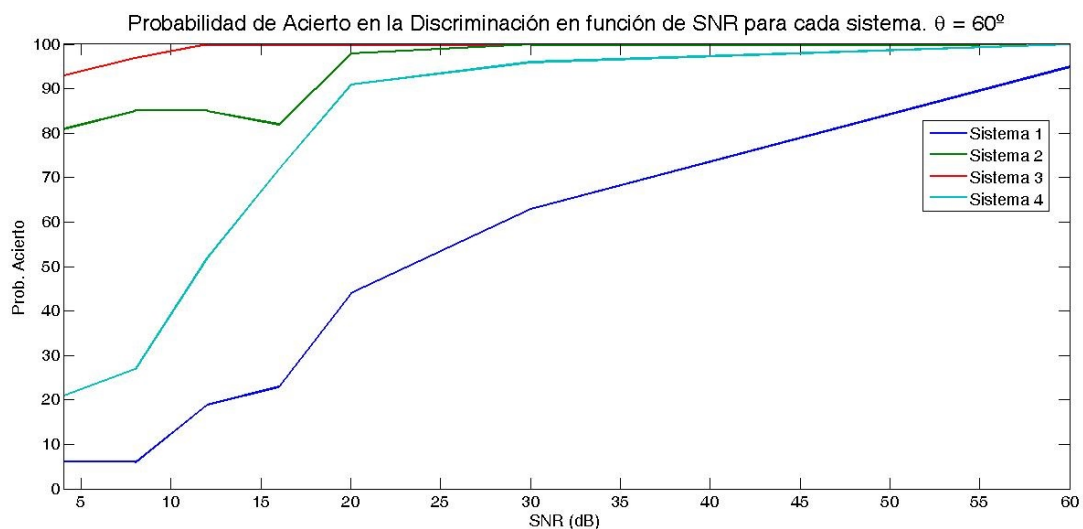
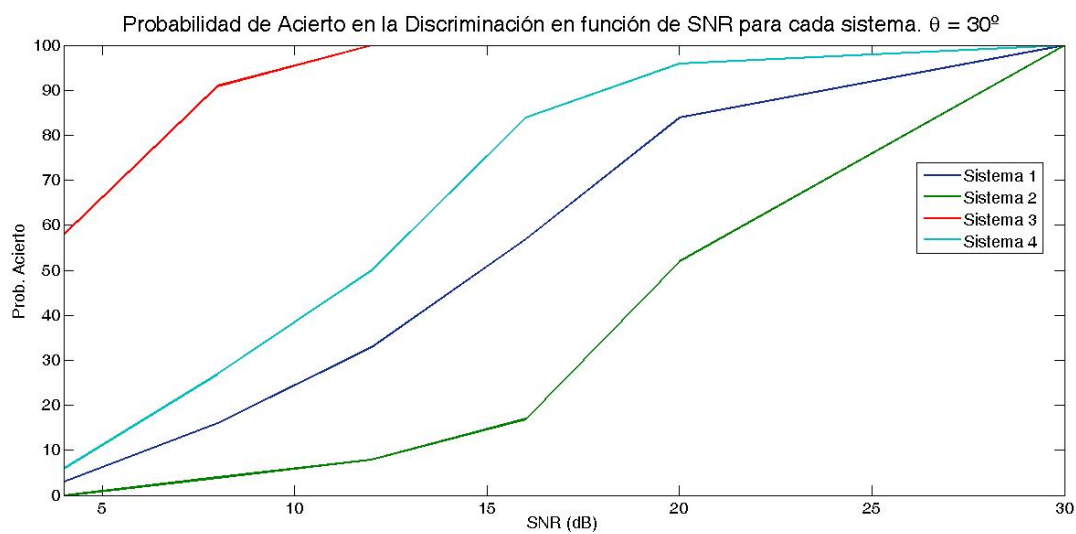
Se concluye a partir de los resultados anteriores que el sistema 3, formado por los S-Pulsos contruidos sobre  $\beta$ -splines exponenciales de orden 1, es el que asegura una mayor probabilidad de acierto en la discriminación del blanco, para todos los ángulos estudiados. Este es, además, el sistema cuyo comportamiento es menos dependiente del nivel de ruido.

Para ángulos  $\theta$  iguales o inferiores a  $45^\circ$ , el segundo sistema que mejores resultados ofrece es el 4, formado por los S-Pulsos continuos contruidos sobre  $\beta$ -splines expo-

nenciales de orden 2. Este sistema, sin embargo, no ofrece buenos resultados a ángulos grandes, de  $60^\circ$  o mayores. En estos casos, el segundo mejor sistema es el 2, formado por los S-Pulsos truncados construidos sobre  $\beta$ -splines polinómicos de orden 3.

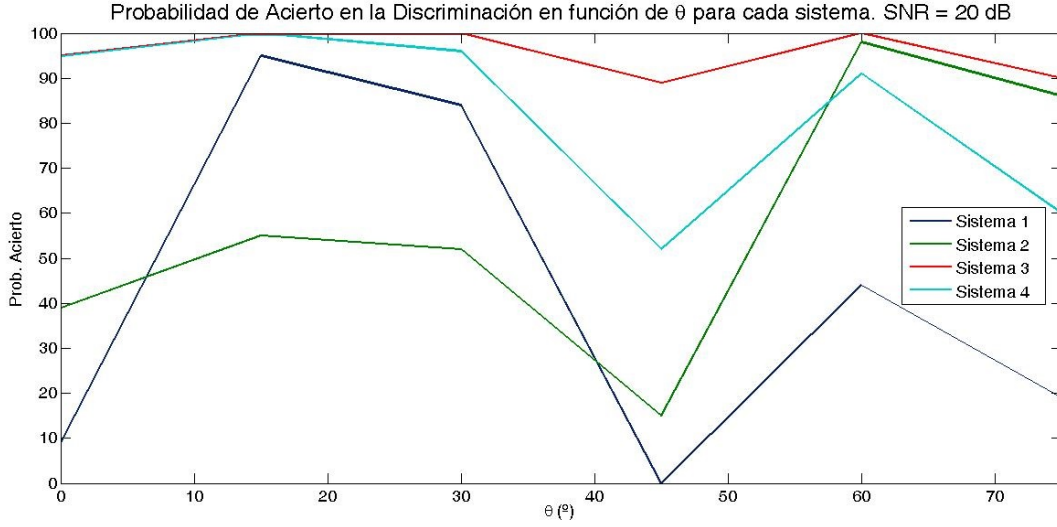
En cuanto a la comparación entre el sistema 2 y el sistema 1, formado por los  $\beta$ -splines continuos construidos sobre  $\beta$ -splines polinómicos de orden 3, se observa que el 1 funciona mejor con  $\theta$  entre  $15^\circ$  y  $30^\circ$ , mientras que el 2 lo hace con  $\theta = 0^\circ$  y con  $\theta$  mayor que  $45^\circ$ . Para  $\theta = 45^\circ$  y  $\theta = 75^\circ$  el sistema 1 ofrece resultados anormalmente malos.

Los valores de  $\theta$  que más facilitan la discriminación son  $15^\circ$ ,  $30^\circ$  y  $60^\circ$ . A continuación se incluyen tres gráficas que permiten visualizar estas conclusiones.



Las conclusiones principales que se extraen de estos resultados pueden resumirse en:

1. Utilizar los  $\beta$ -splines exponenciales y optimizar el sistema de discriminación de forma que el  $DF$  sea lo más alto posible ayuda a obtener probabilidades de acierto más altas al discriminar el blanco conductor en ambientes con alto nivel de ruido.



Esto se comprueba claramente al analizar los resultados obtenidos para el sistema 3, y, en menor medida, al analizar los resultados obtenidos para el sistema 4.

- Además, estos dos sistemas construidos sobre  $\beta$ -splines exponenciales presentan un comportamiento más estable frente a variaciones de  $\theta$ . Esto se aprecia en la última gráfica. Esta propiedad es especialmente importante, ya que la principal ventaja de los esquemas de discriminación basados en frecuencias naturales es la independencia teórica con respecto al ángulo de orientación del blanco.
- El hecho de trabajar con  $\beta$ -splines de tipo continuo permite introducir los  $\beta$ -splines exponenciales de orden 2 con un tiempo de cálculo razonable. Esto se ha visto al inicio de la sección 4.3.

Una observación adicional es que en la mayoría de los casos, cuando el nivel de ruido es suficientemente alto, las probabilidades de identificar al hilo que emite la señal como el hilo de  $L_r = 0.9, 1.0$  o  $1.1$  no son iguales a  $1/3$ , sino que tienden a otros valores. Por ejemplo, la probabilidad de identificar el blanco emisor de la señal como el de  $L_r = 1.0$  tiende en muchos casos a 0 cuando el nivel de ruido aumenta, como se aprecia en la tabla. Entonces, se concluye que en ambientes muy ruidosos el sistema podrá identificar el blanco generador de la señal siempre como el mismo blanco, con una probabilidad muy alta, aunque esta identificación es errónea.

Otra observación adicional es que los resultados dependen de la resolución temporal  $\Delta t$  con la que se trabaja numéricamente a la hora de generar las señales y los S-Pulsos. En este trabajo,  $\Delta t = 0.001L/c$ . Se ha comprobado que trabajar con otros valores de  $\Delta t$  puede variar ligeramente los resultados obtenidos. Esto es un efecto de discretización. El método expuesto se ha desarrollado para señales y S-Pulsos definidos en un dominio temporal continuo, mientras que para realizar los cálculos es necesario discretizar dicho dominio temporal.

## Referencias

- [1] C. E. Baum,  
*Emerging technology for transient and broad-band analysis and synthesis of antennal and scatterers,*  
Proceedings of the IEEE vol 64, no 11, (1976) pp 1598-1616.
- [2] C. E. Baum, E. J. Rothwell, K. M. Chen, D. P. Nyquist,  
*The singularity expansion method and its application to target identification,*  
Proceedings of the IEEE vol 79, no 10, (1991) pp 1481-1492.
- [3] D. Blanco, D. P. Ruiz, E. Alameda, M. C. Carrión,  
*Extinction Pulses Synthesis for Radar Target Discrimination Using  $\beta$ -Splines, New E-Pulse Conditions,*  
IEEE Transactions on Antennas and Propagation vol 54, no 5, (2006) pp 1577-1586.
- [4] K. M. Chen, D. P. Nyquist, E. J. Rothwell, L. L. Webb, B. Drachman  
*Radar Target Discrimination by Convolution of Radar Return with Extinction-Pulses and Single-Mode Extraction Signals,*  
IEEE Transactions on Antennas and Propagation vol 34, no 7, (1986) pp 896-904.
- [5] P. Ilavarasan, J. E. Ross, E. J. Rothwell, K. M. Chen, D. P. Nyquist,  
*Performance of an Automated Radar Target Discrimination Scheme Using E Pulses and S Pulses,*  
IEEE Transactions on Signal Processing vol 41, no 5, (1993) pp 582-588.
- [6] J. D. Morales, D. Blanco, D. P. Ruiz, M. C. Carrión,  
*Radar Target Identification via Exponential Extinction-Pulse Synthesis,*  
IEEE Transactions on Antennas and Propagation vol 55, no 7, (2007) pp 2064-2071.
- [7] E. J. Rothwell, M. J. Cloud,  
*Electromagnetics,*  
CRC Press, (2008) p 489.
- [8] M. Unser, T. Blu,  
*Cardinal Exponential Splines: Part I - Theory and Filtering Algorithms,*  
IEEE Transactions on Signal Processing vol 53, no 4, (2005) pp 1425-1438.