

Trabajo Fin de Grado en Física

Estudio de propiedades estadísticas del microlensing gravitatorio de cuásares

José Calderón Infante

Universidad de Granada

Junio de 2017



**UNIVERSIDAD
DE GRANADA**

Tutor: Jorge Jiménez Vicente

Departamento de Física Teórica y del Cosmos

Universidad de Granada

Abstract

In this work we compare the gravitational microlensing magnification statistics of several distributions for the masses of the microlenses. In particular, we compare the statistics of extreme bimodal and unimodal mass distributions. The results are applied to the observations of quasar microlensing magnifications to put constraints on the mass and abundance of primordial black holes as constituents of the dark matter halos of galaxies.

Índice

1	Introducción	3
2	Lentes gravitacionales	3
2.1	Algo de historia	5
2.2	Teoría básica de lentes gravitacionales	5
2.3	Distorsión de la imagen y magnificación	8
2.4	Lentes puntuales y radio de Einstein	10
2.5	Utilidades del efecto lente	12
3	Microlensing de cuásares	13
3.1	Galaxias como lentes	13
3.2	Cuásares como fuentes	15
3.3	Medición de la magnificación causada por microlensing en cuásares	16
3.4	Simulación de mapas de magnificación	18
3.5	Detalles de la simulación de mapas de magnificación de microlensing	21
4	Comparación de la estadística de microlensing de una distribución bimodal extrema con una unimodal	23
4.1	Metodología	24
4.2	Simulación de los mapas de los mapas de magnificación de microlensing . .	25
4.3	Análisis de los histogramas y conclusiones	28
5	Aplicación al estudio de PBH como materia oscura	32
6	Conclusiones	35
	Referencias	36

1 Introducción

El efecto lente gravitacional ha logrado en los últimos años asentarse como una herramienta de gran utilidad en Astrofísica y Cosmología. Gracias a este efecto se han podido llevar a cabo estudios de la distribución de materia de numerosos objetos y poner cotas a la abundancia de objetos compactos en nuestro Universo.

A lo largo de este texto se pretende dar una idea clara de qué es este efecto lente gravitacional, cuales son sus principales propiedades, cómo se modela y cuál es su aplicabilidad en distintos estudios.

Para nosotros el caso concreto de más interés será el microlensing de cuásares. Veremos como se pueden hacer mediciones experimentales de este fenómeno y como construir un modelo teórico para comparar con las observaciones. Para aplicar dicho modelo teórico habrá que recurrir a los métodos numéricos. Así pues, se explica la idea básica detrás de los principales algoritmos de simulación de *mapas de magnificación*.

Una vez adquiridas las herramientas necesarias, se llevará a cabo un estudio en el que se compara la estadística resultante de un modelo de *microlensing* con distribución bimodal de masas con varios modelos unimodales. El objetivo de esto es comprobar hasta qué punto el microlensing de cuásares es sensible a la bimodalidad (la existencia de dos poblaciones de microlentes con distintas masas) y comprobar si se puede tratar de reproducir una distribución bimodal con una unimodal.

Por último, veremos una aplicación directa de este estudio a la investigación de los agujeros negros como parte de la llamada materia oscura (tema de gran actualidad en el que se están realizando numerosos trabajos de investigación)

2 Lentes gravitacionales

El estudio llevado a cabo en este trabajo hace uso del efecto lente gravitacional. Así pues, en esta sección se explica brevemente en qué consiste este efecto y cuales son sus principales propiedades.

La teoría de la Relatividad General de Albert Einstein predice que la masa y la energía curvan el espacio-tiempo, produciendo esto un efecto sobre los objetos que se hallen inmersos en este, incluida la luz.

El efecto lente gravitatoria se produce gracias a que la luz se ve afectada por la gravedad. Nótese que cualquier objeto que tenga masa puede actuar como lente gravitatoria, aunque como luego veremos, para que este efecto sea notable será necesario que dicho objeto sea muy masivo.

La métrica de Schwarzschild describe un espacio-tiempo esféricamente simétrico y estático curvado por un objeto esférico y estático de masa M . Estudiando sus geodésicas nulas, que describen las trayectorias de un objeto con masa $m = 0$, se puede calcular la desviación que sufre un rayo de luz en su trayectoria. Esto se hace bajo la suposición de que el parámetro de impacto ξ (distancia entre la lente y la dirección del haz incidente) es mucho mayor que el radio de Schwarzschild de dicho objeto ($\xi \gg \frac{2GM}{c^2}$). El resultado es el siguiente:



Figura 1: Galaxia afectada por efecto lente fuerte. La lente es una galaxia elíptica. Se observan cuatro imágenes fuertemente distorsionadas. Imagen obtenida de [1]

$$\hat{\alpha} = \frac{4GM}{c^2 \xi} = 1.75'' \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \left(\frac{\xi}{R_{\odot}} \right)^{-1} \quad (2.1)$$

La obtención de este resultado puede encontrarse en la sección 8.5 del texto sobre Relatividad General de Steven Weimberg [3].

Según la ecuación (2.1), la desviación que sufre un rayo de luz es proporcional a la masa de la lente e inversamente proporcional al parámetro de impacto. Además, la segunda igualdad nos muestra que para un rayo tangente a la superficie del Sol esta desviación es muy pequeña. Como ya se dijo antes, para que el efecto lente gravitatoria sea notorio son necesarias lentes muy masivas (galaxias, agujeros negros supermasivos, etc). Es más, por muy masivo que sea el objeto, por la aproximación $\xi \gg \frac{2GM}{c^2}$ siempre consideraremos $\hat{\alpha} \ll 1$.

Teniendo en cuenta la intensidad del efecto lente se distinguen tres regímenes: fuerte, débil y micro.

- Efecto lente fuerte: En este régimen la lente es muy masiva y está prácticamente alineada con la fuente de luz y el observador. Se observan imágenes múltiples y muy distorsionadas del objeto emisor. Un ejemplo de observación de efecto lente en este régimen se puede ver en la figura 1.
- Efecto lente débil: En este régimen la lente es masiva pero está más alejada de la línea que une la fuente con el emisor. Se observa una imagen débilmente distorsionada.
- Microlensing: En este régimen la lente es muy poco masiva (estrellas, planetas, etc). Aunque la lente esté alineada con el observador y la fuente, las imágenes múltiples no son resolubles y la distorsión es imperceptible. El efecto lente en este régimen se detecta a través de la *magnificación*. En la Sección 3 se desarrollan en más profundidad las propiedades del microlensing, ya que es el régimen del que trata este estudio.

2.1 Algo de historia

La idea de que la luz fuera afectada por la gravedad no surge con la relatividad general. Isaac Newton ya la discutió en su libro *Opticks* publicado en 1704.

Usando la teoría newtoniana de la gravedad se puede calcular la desviación que sufre un objeto masivo, obteniéndose:

$$\hat{\alpha}_N = \frac{2GM}{v^2 \xi} \quad (2.2)$$

Como es de esperar por la correspondencia entre masa inercial y masa gravitacional, este resultado no depende de la masa del objeto. Entonces, si consideramos la luz como “masiva” para justificar que sea afectada por la gravedad, solo tenemos que sustituir $v = c$ para hallar la desviación que sufrirá esta:

$$\hat{\alpha}_N = \frac{2GM}{c^2 \xi} \quad (2.3)$$

Este resultado no está tan alejado de la realidad. Nótese que se relaciona con la fórmula obtenida aplicando Relatividad General por tan solo un factor 2.

$$\hat{\alpha}_R = 2\hat{\alpha}_N \quad (2.4)$$

Aunque la dependencia con la masa de la lente y el parámetro de impacto sea la misma en ambas predicciones, está claro que el factor 2 supone una diferencia entre la teoría de la Relatividad General y la gravedad newtoniana.

De hecho, la medición de la desviación de los rayos de luz que pasaban cerca del Sol durante un eclipse solar en 1919 por parte del astrónomo Arthur Eddington permitió comprobar que la fórmula correcta era la predicha por la Relatividad General. Esta fue una de las evidencias que dieron credibilidad a esta teoría frente a la teoría newtoniana.

A parte de esta, las principales primeras detecciones de efecto lente que se lograron llevar a cabo se encuentran enumeradas a continuación:

- Imágenes múltiples (Walsh et al. 1971 [4])
- Arcos luminosos gigantes (Lynds & Petrosian 1986 [5]; Soucail et al. 1987 [6])
- Anillos luminosos (Hewitt et al. 1988 [7])
- Microlensing de cuásares (Irwin et al. 1989 [8])
- Efecto lente débil (Tyson et al. 1990 [9])
- Microlensing galáctico (Alcock et al. 1993 [10]; Aubourg et al. 1993 [11])

2.2 Teoría básica de lentes gravitacionales

La ecuación (2.1) solo sirve para describir el efecto lente causado por una masa esféricamente simétrica y en reposo (métrica de Schwarzschild). Para cualquier otra distribución de masa habría que volver a estudiar las geodésicas nulas de la métrica, asociada a dicha

distribución por las ecuaciones del campo de Einstein. Esta tarea es inabordable, pero bajo la aproximación $|\hat{\alpha}| \ll 1$ podemos suponer que la desviación causada por un sistema con múltiples lentes será la suma vectorial de las desviaciones causadas por cada una. A continuación se justifica esto detalladamente.

Consideremos un sistema tridimensional con densidad de masa $\rho(\mathbf{r})$. Describamos también la trayectoria de un rayo de luz atravesando este sistema mediante un vector $(\xi_1(\lambda), \xi_2(\lambda), r_3(\lambda))$, donde λ es un parámetro afín. Se escoge que el rayo inicialmente se propague en la dirección del eje z .

Dado que $|\hat{\alpha}| \ll 1$, las coordenadas ξ_1 y ξ_2 prácticamente no varían durante la trayectoria del rayo, teniendo así que el vector bidimensional en los ejes x e y es constante, es decir, $\xi(\lambda) \approx \xi$. A una distribución que cumple esta aproximación se le llama *lente geoméricamente delgada*. Tenemos así que el parámetro de impacto del rayo con respecto a un diferencial de masa dm en una posición $\mathbf{r}' = (\xi'_1, \xi'_2, r'_3)$ no dependerá de la coordenada z , es decir, $(\xi - \xi') (r'_3) = \xi - \xi'$.

Esta aproximación es vital, ya que nos permite considerar que el ángulo de desviación total del rayo es la suma vectorial de los ángulos que se desvía a causa de cada uno de los diferenciales de masa. En nuestro caso esto se traduce a:

$$\hat{\alpha}(\xi) = \frac{4G}{c^2} \int d^2\xi' \int dr'_3 \rho(\xi'_1, \xi'_2, r'_3) \frac{\xi - \xi'}{|\xi - \xi'|^2} \quad (2.5)$$

De nuevo gracias a la aproximación hecha podemos sacar el último término fuera de la integral en dr'_3 . Definiendo

$$\Sigma(\xi') = \int dr'_3 \rho(\xi'_1, \xi'_2, r'_3) \quad (2.6)$$

llegamos a la ecuación de la desviación causada por una distribución de materia cualquiera:

$$\hat{\alpha}(\xi) = \frac{4G}{c^2} \int d^2\xi' \Sigma(\xi') \frac{\xi - \xi'}{|\xi - \xi'|^2} \quad (2.7)$$

Tomemos ahora que el observador está a una distancia de tamaño angular aparente (es el tipo de distancia cosmológica que nos interesa) D_d de la lente y D_s de la fuente, la distancia entre la fuente y la lente será D_{ds} (en general $D_{ds} \neq D_s - D_d$ debido a la curvatura del espacio-tiempo). Nótese que podremos considerar que la lente es geoméricamente delgada si su grosor es mucho menor que D_d y D_{ds} .

En la figura 2 se especifica la situación y se ve claro que se debe cumplir:

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{D_s}{D_d} \boldsymbol{\xi} - D_{ds} \hat{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) \quad (2.8)$$

Aquí se ha tenido en cuenta que todos los ángulos que aparecen son pequeños.

Por último, introduciendo las variables angulares $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\eta}/D_s$ y $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\xi}/D_d$, llegamos a la conocida como ecuación de la lente:

$$\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) \quad (2.9)$$

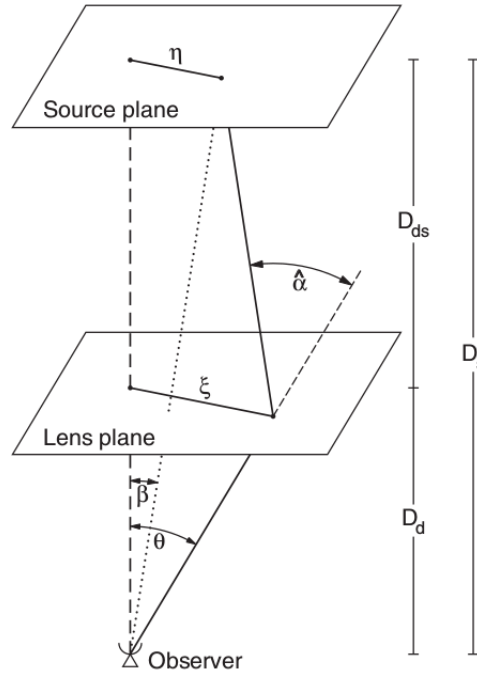


Figura 2: Situación típica en astrofísica al observar el efecto lente. Imagen obtenida de [2].

Donde se ha introducido el ángulo de desviación escalado

$$\alpha(\theta) \equiv \frac{D_{ds}}{D_s} \hat{\alpha}(D_d \theta) \quad (2.10)$$

Llegamos a que un objeto que realmente está en una posición angular β en la bóveda celeste podrá ser localizado por un observador en toda posición angular θ que cumpla la ecuación (2.9) debido al efecto de la lente gravitacional. Nótese que decimos “en toda posición angular” porque puede haber más de un θ que cumpla la condición, formándose así imágenes múltiples como las que ya vimos que se forman en el régimen de efecto lente fuerte.

Volviendo a la ecuación (2.7), y poniéndolo todo en función de las variables angulares aquí dadas, se puede llegar a una ecuación para el ángulo de desviación escalado:

$$\alpha(\theta) = \frac{1}{\pi} \int d^2 \theta' \kappa(\theta') \frac{\theta - \theta'}{|\theta - \theta'|^2} \quad (2.11)$$

Donde se ha definido un parámetro muy importante que definirá nuestro modelo de lente, la llamada *convergencia* o *densidad superficial adimensional*:

$$\kappa(\theta) \equiv \frac{\Sigma(D_d \theta)}{\Sigma_{cr}} \quad \text{con} \quad \Sigma_{cr} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_s}{D_d D_{ds}} \quad (2.12)$$

Σ_{cr} es conocida como densidad superficial crítica, ya que a partir de $\Sigma > \Sigma_{cr}$ se hace posible que la lente produzca imágenes múltiples.

En el caso en el que haya múltiples imágenes la función $\beta(\theta)$ no es fácilmente invertible excepto para modelos de lente muy simples. Un motivo de esto es que no se sabe a priori el número de imágenes que aparecerán.

Podemos escribir la ecuación (2.7) de forma más simple gracias a la identidad

$$\nabla \ln |\boldsymbol{\theta}| = \frac{\boldsymbol{\theta}}{|\boldsymbol{\theta}|^2} \quad (2.13)$$

Así, definiendo el potencial de desviación como,

$$\psi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int d^2\theta' \kappa(\boldsymbol{\theta}') \ln |\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'| \quad (2.14)$$

que se puede relacionar con la convergencia mediante la ecuación de Poisson,

$$\nabla^2 \psi(\boldsymbol{\theta}) = 2\kappa(\boldsymbol{\theta}) \quad (2.15)$$

se llega a:

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = \nabla \psi(\boldsymbol{\theta}) \quad (2.16)$$

Esta ecuación nos será útil en la próxima sección.

2.3 Distorsión de la imagen y magnificación

Como ya se vio en en la figura 1, una lente gravitacional distorsiona la imagen de una fuente extensa. Supongamos que la fuente es suficientemente pequeña como para linealizar $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\theta})$ alrededor de alguna de las imágenes de la fuente posicionada en $\boldsymbol{\theta}_0$:

$$\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\beta}_0 + \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \cdot (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0) \text{ siendo } \boldsymbol{\beta}_0 = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\theta}_0) \quad (2.17)$$

Nótese que la matriz $\mathcal{A}(\boldsymbol{\theta}) \equiv \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\theta}}$ caracteriza la distorsión que hay entre la fuente y la imagen. Concretamente, la distorsión que se produce de la fuente a la imagen viene dada por la inversa de esta matriz, llamada *operador de magnificación* $M(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$. Introduciendo aquí la ecuaciones (2.9) y (2.15) podemos escribir:

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} 1 - \kappa(\boldsymbol{\theta}) - \gamma_1(\boldsymbol{\theta}) & -\gamma_2(\boldsymbol{\theta}) \\ -\gamma_2(\boldsymbol{\theta}) & 1 - \kappa(\boldsymbol{\theta}) + \gamma_1(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Donde se ha introducido el segundo parámetro fundamental que caracterizará la lente, el *shear* o *cizalladura*.

$$\gamma \equiv \gamma_1 + i\gamma_2 = |\gamma| e^{2i\varphi} \quad (2.19)$$

Estando sus componentes definidas como

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta_1 \partial \theta_1} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta_2 \partial \theta_2} \right) \quad y \quad \gamma_2 = \frac{\partial \psi}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \quad (2.20)$$

Llegados a este punto es interesante darnos cuenta de que al no haber procesos de absorción ni emisión de luz en el efecto lente gravitacional, el brillo superficial de la fuente y de cualquiera de sus imágenes es el mismo. Llamando $I(\boldsymbol{\theta})$ al brillo superficial de la

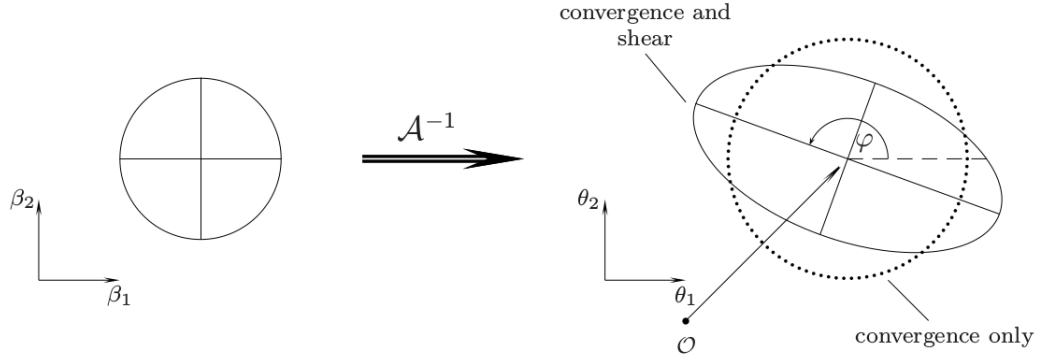


Figura 3: Distorsión de una fuente circular pequeña. Imagen obtenida de [1].

imagen que queremos tratar y $I^{(s)}(\beta)$ al de la fuente podemos expresar esto matemáticamente:

$$I(\theta) = I^{(s)}[\beta_0 + \mathcal{A}(\theta) \cdot (\theta - \theta_0)] \quad (2.21)$$

De acuerdo con esta ecuación, la imagen distorsionada de una fuente circular de radio R será una elipse cuyos semiejes serán R por la inversa de los autovalores de $\mathcal{A}(\theta)$, que son $1 - \kappa \pm |\gamma|$. Además, los ejes propios de la elipse estarán rotados un ángulo φ con respecto a los ejes en los que está descrita la lente. Nótese que es el *shear* lo que produce es una distorsión de la imagen, la convergencia tan solo produce un cambio en el tamaño de esta. En la figura 3 se puede observar este efecto de distorsión.

Otra conclusión que se puede sacar de (2.21) es que el flujo total que recibimos de la fuente no será el mismo que el que se observaría en ausencia del efecto lente gravitacional. Esto se debe a que cambia el tamaño de la imagen pero no así su brillo superficial.

Definimos la magnificación que sufre una fuente debido a la acción de una lente gravitacional como el cociente entre el flujo que observamos y el intrínseco de la fuente. Por lo que ya se ha dicho, esta magnificación no será más que la relación entre el área de la imagen y de la fuente. Ahora bien, considerando $\theta(\beta)$ como un cambio general de coordenadas, el determinante del tensor de magnificación nos da esta relación. Así tenemos:

$$\mu(\theta) = \det(M(\theta)) = \frac{1}{\det(\mathcal{A}(\theta))} \quad (2.22)$$

Como es sabido, el determinante no depende del sistema de coordenadas, luego podemos calcularlo como el producto de los autovalores. Finalmente:

$$\mu(\theta) = \frac{1}{(1 - \kappa(\theta))^2 - |\gamma(\theta)|^2} \quad (2.23)$$

Esta ecuación permite magnificaciones negativas. Esto no significa que recibamos un flujo negativo, lo cual no tiene sentido, sino que entre la fuente y la imagen hay una simetría especular. Debido a esto, al signo de la magnificación se le suele llamar *paridad* de la imagen.

Además, puede haber valores de θ para los cuales $|\mu| \rightarrow \infty$. Estos valores forman lo que se llaman *curvas críticas*, que al pasarlas al plano de la fuente usando la ecuación de la lente nos dan las llamadas *cáusticas*. Está claro que una magnificación divergente no está físicamente permitida. La aparición de estas curvas se debe a que en estas zonas el régimen de óptica geométrica deja de ser válido y habría que trabajar con óptica ondulatoria. Haciendo esto se llega a que la magnificación en estas curvas será muy alta, pero siempre finita.

Cabe destacar que el estudio de las cáusticas en un modelo de lente es muy importante ya que nos da información sobre el número de imágenes que se generará de una fuente.

Siguiendo con el desarrollo anterior, la ecuación (2.23) nos dice la magnificación que tendría una imagen posicionada en θ . En caso de querer calcular la magnificación total que sufre la fuente habría que sumar el valor absoluto de la magnificación correspondiente a cada imagen que se produzca situada en θ_i

$$\mu_p(\beta) = \sum_i |\mu(\theta_i)| \quad (2.24)$$

Esta ecuación solo es válida para fuentes muy pequeñas (puntuales). Para una fuente extensa posicionada en β , habrá que convolucionar la magnificación que sufriría una fuente puntual con el brillo superficial de la fuente $I_{norm}^{(s)}(\beta')$.

$$\mu_e(\beta) = \int d^2\beta' \mu_p(\beta') I_{norm}^{(s)}(\beta' - \beta) \quad (2.25)$$

El concepto de magnificación será clave a lo largo del estudio, ya que es la magnitud con la que se trabaja en microlensing. Ya que, como se dijo antes, en este régimen no se puede resolver las distintas imágenes y mucho menos la distorsión.

Por último, destaquemos que en la mayoría de los casos no se conoce el brillo intrínseco de la fuente. Esto hace que la definición de magnificación como la razón entre el brillo observado y el intrínseco no sea operacional para hacer mediciones de magnificación experimentalmente. En la sección 3 descubriremos que los cuásares (como fuentes) nos ofrecen las propiedades adecuadas para realizar esta medición.

2.4 Lentes puntuales y radio de Einstein

En esta sección especificaremos algunos de los resultados obtenidos para el caso de lentes puntuales. Este estudio nos será muy útil porque, como veremos en la Sección 3, el microlensing de cuásares será causado por objetos compactos que podrán ser tratados como lentes puntuales.

Tomemos la ecuación de la lente (2.9) para una lente puntual posicionada en el origen de coordenadas, para la cual el ángulo de desviación viene dado por la ecuación (2.1).

$$\beta(\theta) = \theta - \frac{D_{ds}}{D_d D_s} \frac{4GM}{c^2 \theta} \quad (2.26)$$

Sea además que la fuente está totalmente alineada con la lente, es decir, $\beta = 0$. La ecuación resultante es resoluble y la imagen resultante será una circunferencia cuyo radio angular no será otro que el *radio de Einstein* dado por:

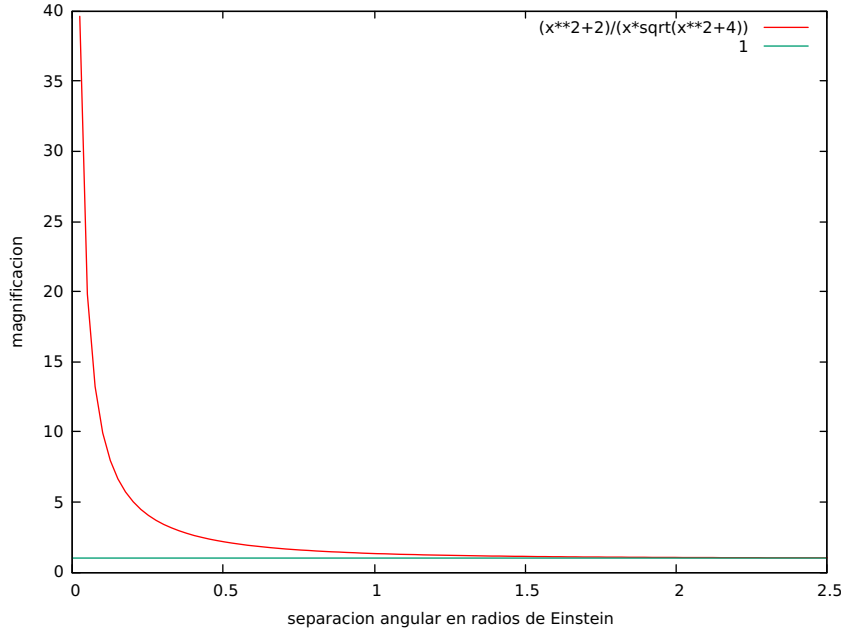


Figura 4: Magnificación de una fuente puntual causada por una lente puntual en función de la separación angular entre estas en radios de Einstein

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ds}}{D_d D_s}} \quad (2.27)$$

Si estudiamos el caso general $\beta \neq 0$, la solución a la ecuación de la lente devuelve dos imágenes. En función del radio de Einstein de la lente, estas dos imágenes estarán posicionadas en:

$$\theta_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \right) \quad (2.28)$$

Ya conocidas las posiciones de las imágenes, podemos realizar los cálculos descritos en la sección 2.3, llegándose a que la magnificación para cada una de estas dos imágenes es:

$$\mu_{\pm} = \frac{u^2 + 2}{2u\sqrt{u^2 + 4}} \pm \frac{1}{2} \quad (2.29)$$

Donde u es la separación angular entre la fuente y la lente en radios de Einstein $u = |\beta| / \theta_E$. Es trivial ver que la magnificación total para una fuente puntual será:

$$\mu_p = \frac{u^2 + 2}{u\sqrt{u^2 + 4}} \quad (2.30)$$

En la figura 4 se puede observar que la magnificación se vuelve prácticamente 1 para $|\beta| > \theta_E$. Esto es interesante porque, para fuentes mucho más extensas que el área dada por el radio de Einstein, al aplicar la ecuación (2.25) se tiene que el efecto de la lente sobre la fuente será despreciable, pues esta solo magnificará una pequeña parte de su extensión.

Merece la pena repetir que aunque para $u \rightarrow 0$ se tiene que $\mu_p \rightarrow \infty$ sabemos que esto no es físicamente posible, habrá una magnificación muy alta, pero en todo caso finita.

Lo interesante de la definición del radio de Einstein es que es una escala natural del microlensing. De hecho siempre se trabaja en unidades de radios de Einstein de una masa de referencia M_0 que típicamente suele ser o la masa del Sol o la masa de las microlentes (si se considera que todas tienen la misma masa).

2.5 Utilidades del efecto lente

En esta subsección se pretende dar una impresión general sobre las principales utilidades del efecto lente gravitacional:

- Medir masas y distribuciones de masa.

Como ya se ha visto el efecto lente gravitatoria es causado por objetos masivos vía interacción gravitatoria, luego no distingue entre tipos de masa (oscura o luminosa) ni entre estados de la materia. Esto que a priori parece ser una desventaja (aporta menos información) es a su vez de gran utilidad. Se puede utilizar este efecto para obtener muy buenas estimaciones de la masa de la lente (efecto lente fuerte) e incluso de la distribución de masa interna de esta (efecto lente débil y microlensing).

- Acotar la densidad de objetos compactos.

La probabilidad de que ocurra un evento de efecto lente es proporcional a la densidad de lentes que haya en el medio. Podemos tomar muestras de sistemas parecidos (para que dicha muestra sea estadísticamente significativa) y estudiar la frecuencia de aparición de cierto fenómeno causado por lentes gravitacionales con características concretas. Así, podemos estimar (o al menos acotar) la densidad de objetos de este tipo.

Esta posibilidad se ha utilizado principalmente para estimar la densidad de objetos compactos, ya sea en función de la edad del universo (o del redshift al que observe-mos) o en estructuras típicas como galaxias o cúmulos.

- Estimar parámetros cosmológicos.

Tener en cuenta modelos cosmológicos en el desarrollo del modelo teórico para el efecto lente gravitacional lleva a resultados que dependerán de los parámetros del susodicho modelo. Por ejemplo, introduciendo que el universo está en expansión se pueden realizar estudios de efecto lente para estimar el valor de la constante de Hubble H_0 . Véase Blau 2017 [12].

Las principales ventajas de este método frente a otros son:

- No es necesario medir distancias astronómica con precisión, tarea que normalmente es muy compleja. Esto si es necesario en la estimación mediante galaxias espirales o candelas estándar.
- Se hace una verdadera medida a tamaños cosmológicos. Al usar Cepheids como candelas estándar no se puede trabajar con objetos muy lejanos por la imposibilidad de resolver estrellas a tanta distancia.

- Usar las lentes gravitacionales como “telescopios naturales”.

Tal y como se dedujo con anterioridad, el efecto lente gravitacional causa magnificación sobre las fuentes. En los casos en los que $\mu > 1$ tenemos que el tamaño angular de la imagen es mayor que si no estuviera actuando la lente. Gracias a esto hay objetos que se pueden estudiar en más en profundidad o que incluso no serían detectables si no fuera por esta magnificación. Por ejemplo, esto ha permitido realizar estudios de objetos a altos redshifts tales como galaxias y cuásares.

- Buscar exoplanetas.

Si un sistema estrella-planeta actúa como lente gravitacional, la órbita del planeta alrededor de la estrella causará pequeños cambios en la magnificación de la fuente. Midiendo estos cambios se tiene un indicio de la existencia de dicho planeta. Esto, a diferencia de la técnica del tránsito, no requiere que el plano orbital del planeta sea casi perpendicular a la línea de observación. Por otro lado, las mediciones de flujo deben ser más precisas.

3 Microlensing de cuásares

En esta sección trataremos el sistema sobre el que se desarrolla el estudio. En él la lente es una galaxia y la fuente es un cuásar.

Primero comentaremos los efectos que produce una galaxia como lente y cómo modelarla. Luego pasaremos a explicar qué es un cuásar y el proceso físico a través del cual emiten, así como las bondades que presentan estos objetos como fuentes para el efecto lente.

Tras esto, se explicará como medir la magnificación por microlensing de estos. Por último se hablará sobre las simulaciones que se llevan a cabo para conseguir resultados con los que comparar las medidas.

3.1 Galaxias como lentes

Una galaxia actúa como lente en los tres regímenes presentados en la Sección 2, aunque a nosotros nos interesarán principalmente dos de ellos: efecto fuerte y microlensing.

La galaxia en su conjunto producirá efecto lente fuerte. Si la alineación entre el observador, la lente y la fuente es suficientemente buena, se producirán múltiples imágenes de la fuente. Esto será crucial para poder realizar la medida experimental de la magnificación por microlensing que sufrirá la fuente.

Para tratar la galaxia como macro-lente se suele utilizar un modelo paramétrico SIS+ γ . Donde SIS (*Singular Isothermal Sphere*) es un modelo de *esfera isoterma singular* para la galaxia y γ da cuenta del *shear* externo producido por el entorno.

El modelo SIS es aquel en el que se toma una densidad de materia del tipo:

$$\rho(r) = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G r^2} \quad (3.1)$$

Siendo r la coordenada radial y σ_v la dispersión de las velocidades de las estrellas en la galaxia.

Por otro lado, los objetos compactos dentro de la galaxia (estrellas, BH, etc), que a partir de ahora llamaremos *microlentes*, producirán microlensing. Sobre este microlensing se realizará el estudio. Para ello modelaremos la lente como formada por un lado por lentes puntuales distribuidas uniformemente y por otro por una distribución uniforme de materia suave (que se suele interpretar como materia oscura).

Se puede considerar que toda la materia está distribuida uniformemente porque normalmente trataremos con zonas muy pequeñas del total de la galaxia, pudiéndose suponer que los parámetros que controlan el efecto macro-lente permanecen constantes.

A continuación se comentarán los parámetros que formarán nuestro modelo de microlensing.

Como ya sabemos, dos parámetros fundamentales en el modelado de una lente son la convergencia (κ) y el shear (γ). Estos normalmente se fijan en cada imagen mediante medidas del efecto lente fuerte (modelado como un SIS+ γ como ya se dijo con anterioridad) usando las posiciones de las distintas imágenes y de la lente. De nuevo, dado que tratamos con zonas muy pequeñas de la galaxia podemos tomar κ y γ constantes para cada imagen.

También debemos introducir la fracción de materia en forma de microlentes (α). Así, la convergencia de la lente estará dividida en dos contribuciones. Una será causada por los objetos compactos (κ_*) y la otra por la materia suave (κ_s). Estas dos contribuciones se pueden calcular como:

$$\begin{aligned}\kappa_* &= \alpha\kappa \\ \kappa_s &= (1 - \alpha)\kappa\end{aligned}\tag{3.2}$$

Nótese que $1 - \alpha$ nos da una medida del porcentaje de masa de la galaxia en forma de materia oscura.

Finalmente, habrá que especificar la masa de las microlentes (M_i). Normalmente se considera que todas las microlentes tienen una misma masa M (distribución/modelo unimodal o *single mass*). Hay estudios que sustentan la idea de que la estadística dada por cualquier distribución de masas más compleja se puede aproximar a la resultante de una unimodal con la masa media de estas (Congdon et al. 2007 [13] y Whyte & Turner 2001 [14]). Este será uno de los temas a tratar el estudio que se desarrolla en la Sección 4.

Bajo este modelo, se puede demostrar que la ecuación de la lente tomará la forma:

$$\beta(\theta) = \begin{pmatrix} 1 - \kappa_s - \gamma & 0 \\ 0 & 1 - \kappa_s + \gamma \end{pmatrix} \theta - \sum_{i=1}^{N_*} \frac{4GM_i}{c^2} \frac{D_{ds}}{D_s D_d} \frac{\theta - \theta_i}{|\theta - \theta_i|^2}\tag{3.3}$$

Donde N_* es el número de microlentes que consideremos y θ_i es la posición de cada una de ellas. El primer término es el correspondiente a la materia suave y el segundo el causado por las microlentes.

En el segundo término se reconoce la expresión de θ_E^2 para cada una de las masas de las microlentes. Gracias a esto, dando M_i en unidades de una cierta escala de masas M_0 y las variables angulares en unidades del radio de Einstein de M_0 , podemos escribir esta ecuación de manera más simple:

$$\beta(\theta) = \begin{pmatrix} 1 - \kappa_s - \gamma & 0 \\ 0 & 1 - \kappa_s + \gamma \end{pmatrix} \theta - \sum_{i=1}^{N_*} M_i \frac{\theta - \theta_i}{|\theta - \theta_i|^2}\tag{3.4}$$

Como ya se adelantó en la sección 2.4, utilizar unidades de radios de Einstein nos ha simplificado enormemente la ecuación. Incluso ha hecho desaparecer la dependencia con las distancias entre observador, lente y fuente. Esto nos permite trabajar independientemente de ellas, utilizando solo coordenadas angulares.

Un detalle muy importante es que esta ecuación es independiente de la escala de masas que tomemos. Esto nos lleva al concepto de *degeneración masa-tamaño*, que consiste en que nuestro modelo de lente es invariante bajo transformaciones del tipo:

$$\begin{aligned} M_i &\rightarrow kM_i \\ \phi &\rightarrow \sqrt{k}\phi \end{aligned} \quad (3.5)$$

Donde ϕ representa todas las variables angulares de los objetos en el plano de la fuente.

Esta *degeneración masa-tamaño* tiene como consecuencia directa que, con tan solo medidas de microlensing, no se puede inferir la masa de la lente y el tamaño de la fuente. Dicho de otra manera, no podemos distinguir entre una lente con masa M actuando sobre una fuente de tamaño θ y otra con masa kM actuando sobre una fuente de tamaño $\sqrt{k}\theta$. Aunque a primer a vista parece que esto es una gran limitación, en la sección 5 veremos que se puede sacar provecho de esta propiedad.

Una última característica de nuestro modelo de lente a tener en cuenta es que no conocemos la posición de cada una de las microlentes. Por este motivo será necesario realizar un tratamiento estadístico, en el cual colocaremos las microlentes de forma aleatoria.

3.2 Cuásares como fuentes

Los cuásares son fuentes astronómicas cuya emisión se produce en la parte central de una galaxia muy lejana que emite una gran cantidad de energía en una región muy pequeña (del orden de días luz). Son el extremo más luminoso del concepto más general de galaxias con núcleos activos (AGN, del inglés *Active Galactic Nuclei*).

La palabra cuásar (en inglés *quasar*) es un acrónimo de *objeto cuasi-estelar* (*quasi-stellar object* o QSO) o *de fuente de radio cuasi-estelar* (*quasi-stellar radio source*). Históricamente se distinguía entre objeto cuasi-estelar y fuente de radio cuasi-estelar, hoy en día se sabe que son distintas manifestaciones del mismo tipo de objeto astronómico.

Estos objetos son muy luminosos. Sus luminosidades son del orden de 100 veces la luminosidad de toda la Vía Láctea. Es gracias a esto que pueden ser observados aún estando a tan grandes distancias. Además, esta luminosidad puede variar en tiempos del orden de décadas a días o incluso durante un mismo día.

Se piensa que la gran cantidad de energía que radian se obtiene mediante la acreción de materia a un agujero negro supermasivo ($10^7 - 10^9 M_\odot$) en el centro de la galaxia. Este mecanismo de producción de energía debe ser extremadamente eficiente para poder explicar que se emita tanta energía en tan poco espacio. El más aceptado es la liberación de la energía gravitacional de la materia que cae en el agujero negro, radiándose así hasta el 10 % de la energía en reposo de esta.

La estructura típica de un cuásar es la que se describe a continuación, partiendo de la región más interna hacia afuera:

- En el centro está el agujero negro supermasivo (SMBH)

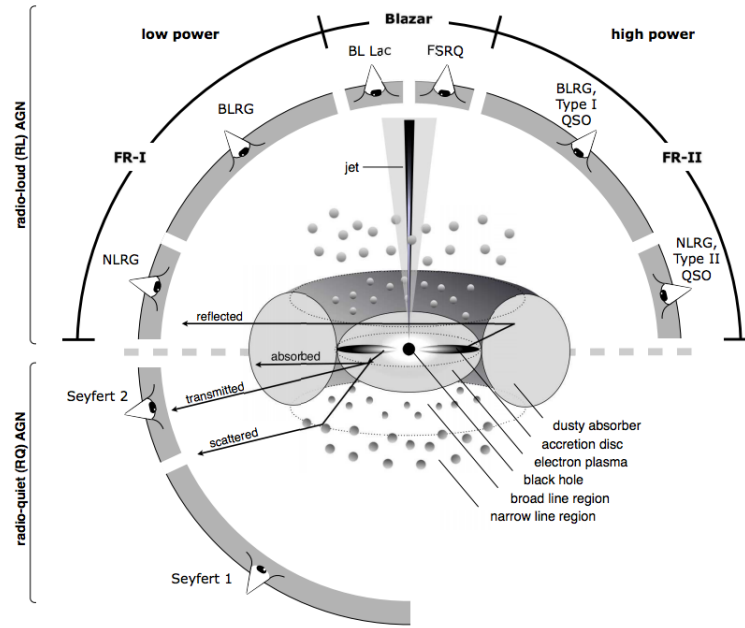


Figura 5: Estructura de un cuásar. Imagen obtenida de [30].

- El disco de acreción, que produce emisión en el continuo.
- La región de líneas anchas (BLR). Como su nombre indica produce líneas anchas en el espectro del cuásar.
- La región de líneas estrechas (NLR). Como su nombre indica produce líneas estrechas en el espectro del cuásar.
- *Jets* de materia. A veces se puede observar uno o dos de estos perpendiculares al disco de acreción.
- Toro de polvo. También se encuentra un toro de polvo alrededor del agujero negro que produce emisión en MIR (infrarrojo medio) y absorción en el espectro del cuásar.

Esta estructura se encuentra esquematizada en la figura 5. Además, en la figura 6 se muestra el espectro típico de un cuásar. En ella se puede comprobar la aparición de algunas de las líneas anchas y estrechas que hemos comentado.

Los cuásares son objetos muy apropiados para estudiar como fuente en el efecto lente gracias a algunas de sus propiedades: su lejanía (ya que aumenta la probabilidad de encontrar una lente entre el cuásar y nosotros), su gran luminosidad (que permite hacer observaciones precisas del fenómeno), y la presencia de la BLR/NLR (que permite hacer mediciones sencillas de la magnificación por microlensing del cuásar). En la siguiente sección (3.3) se explica cómo se realizan estas medidas.

3.3 Medición de la magnificación causada por microlensing en cuásares

Como ya se dijo con anterioridad en la Sección 2.3, excepto para algunos objetos astronómicos concretos (candelas estándar), el brillo intrínseco de una fuente es desconocido. Esto hace que con una sola imagen de la fuente no se pueda medir la magnificación.

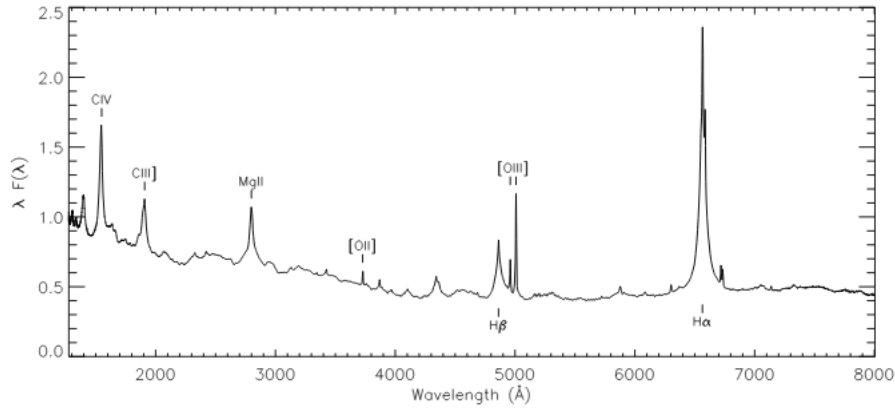


Figura 6: Espectro típico de un cuásar. Imagen obtenida de [31].

Será necesario tener múltiples imágenes, ya que restando la magnitud aparente de dos de estas estamos sustrayendo el brillo intrínseco de la fuente.

Partimos del supuesto de que gracias efecto lente fuerte podemos observar múltiples imágenes del cuásar. estas imágenes tendrán distinto brillo debido fundamentalmente a tres factores:

- Macro-magnificación: Debido al efecto lente fuerte, y como ya hemos visto en la sección 2.3, una imagen tendrá distinta magnificación según su posición.
- Extinción: Los rayos de luz que forman cada imagen recorren espacios distintos. Por tanto pueden sufrir una mayor o menor extinción causada por el medio intergaláctico.
- Microlensing: Causado por los objetos compactos presentes en la galaxia.

Dado que solo nos interesa la contribución del microlensing, debemos sustraer la magnificación debida a los otros dos factores.

Recordemos que en el espectro de un cuásar suele aparecer líneas causadas por la BLR/NLR. Estas regiones tienen un tamaño mucho mayor que el radio de Einstein de una estrella. Gracias a esto sabemos que estas líneas casi no se verán afectadas por microlensing mientras que sí lo estarán por macro-magnificación y extinción (véase Sección 2.4). Por otro lado, la parte del continuo de emisión del espectro se ve afectada por las tres fuentes de magnificación antes comentadas.

Entonces, si le sustraemos la magnificación medida en la línea ancha a la medida en el continuo cercano a esta (en magnitudes), nos estaremos quedando solo con la magnificación causada por microlensing. Midiendo el brillo de una imagen A y otra B tanto en el continuo como en la línea ancha, la magnificación que buscamos será:

$$\Delta m_{AB}^{micro} = (m_A^{cont} - m_B^{cont}) - (m_A^{lin} - m_B^{lin}) \quad (3.6)$$

De esta forma se obtiene una medida muy fiable de la magnificación diferencial que sufren las distintas imágenes del cuásar debido al microlensing. En Mediavilla et al. 2009 [15] se puede encontrar este procedimiento explicado.

Si no disponemos del espectro del cuáasar en un cierto rango de longitudes de ondas en la que queremos estudiar la magnificación la medición se complica.

La estrategia a seguir sería: Hacer un modelo de la galaxia como lente (por ejemplo como el citado en la Sección 3.1). Gracias al modelo de lente podemos estimar la magnificación causada por efecto lente fuerte. Así, midiendo la diferencia entre el brillo de un par de imágenes y sustrayendo la contribución a esta diferencia por la macro-magnificación se obtiene la magnificación debida al microlensing.

Nótese que no se ha tenido en cuenta la diferencia de flujo entre las imágenes debido a la extinción. Esto se debe a que es muy difícil de modelar y a que suele ser muy pequeña. Hay que tener en cuenta que esta asunción puede dar problemas al trabajar en longitudes de onda muy cortas, ya que para estas la extinción es mayor.

El problema de este método radica, como es de esperar, en el modelo de la galaxia como lente y en no tener en cuenta la extinción. Hacer un modelo muy preciso de un sistema tan complejo como puede ser una galaxia y su entorno es una ardua tarea, mientras que uno no muy preciso lleva a una fuente de error considerable.

3.4 Simulación de mapas de magnificación

La principal herramienta que usaremos para estudiar el microlensing de cuásares son los mapas de magnificación. En esta sección se introduce el concepto y se explica los principales métodos de simulación de estos.

Un mapa de magnificación no es más que un mapa que muestra la magnificación que sufrirá una fuente en función de su posición en el plano fuente. En otras palabras, un mapa de magnificación es la representación de la función $\mu_e(\beta)$.

Como ya sabemos, la ecuación de la lente (2.9) solo es invertible en algunos casos muy sencillos. Por otro lado, para aplicar el formalismo descrito en la Sección 2.3 necesitamos conocer la posición de cada una de las imágenes. Más allá de esto, muchos modelos de lente son imposibles de tratar analíticamente. El caso del microlensing de cuásares es un claro ejemplo, ya que habrá un gran número de estrellas y cada una de ellas aporta un término a la función $\alpha(\theta)$.

Queda claro entonces que, en general, la mejor manera de calcular un mapa de magnificación es mediante cálculo numérico. A continuación se explica el método del Inverse Ray Shooting (IRS), introducido por Shneider y Weiss 1986 [16], 1987 [17] y Kayser, Refsdal y Stabell 1986 [18]. Este método es la base sobre la que parten otros algoritmos más complejos para optimizar el cálculo de estos mapas y que se explicarán brevemente al final de esta sección.

Recordemos que la ecuación de la lente nos da un mapeo entre el plano de la lente y el de la fuente ($\theta \rightarrow \beta$). En virtud de la reversibilidad de los rayos de luz, está claro que podemos interpretarla como aquella que describe el cambio en las coordenadas angulares de un rayo de luz que va desde el observador hasta el plano de la fuente, pasando por el plano de la lente. Es decir, en sentido contrario al natural.

El rayo saldría desde el observador con ciertas coordenadas angulares θ . Bajo la aproximación de lente geoméricamente delgada el rayo se propagará en línea recta hasta llegar al plano de la lente, luego sus coordenadas no cambiarán. Ya en el plano de la lente, el rayo se desvía según la ecuación de la lente, pasando a ser sus coordenadas angulares $\beta(\theta)$. De nuevo el rayo se propagará hasta el plano de la fuente sin variar estas coordena-

das.

Además, el efecto lente no cambia el brillo superficial entre un punto del plano fuente y su(s) correspondiente(s) imágenes en el plano de la lente (véase la ecuación (2.21)).

La técnica del IRS toma estas dos ideas para poder estudiar una cierta zona del plano de la fuente. Por cada punto (en coordenadas angulares) del plano imagen podemos lanzar un rayo y calcular en qué punto de plano de la fuente cae. Entonces, igualamos el brillo superficial del punto que estamos estudiando al del punto en el plano de la fuente. Computacionalmente podemos dividir ambos planos en píxeles y repetir este procedimiento para todos los puntos del plano imagen.

Nótese que con esta técnica podemos predecir la imagen formada de la fuente por el efecto lente, pero estamos interesados en calcular la magnificación que sufriría una fuente posicionada en un cierto punto β . Utilizando este mismo método es posible.

En principio tomemos una fuente cuasi-puntual. Ya sabemos que, gracias a que el efecto lente no cambia el brillo superficial, la magnificación no es más que el cociente entre los ángulos sólidos subtendidos por la imagen(es) y la fuente. Dado que en IRS trabajamos con variables angulares, esto se traduce a un cociente de áreas.

Para calcular esta proporción de áreas podemos tirar un número fijado de rayos desde cada píxel en el plano del observador (N_r). Contando el número de rayos que caen en un píxel dado en el plano de la lente ($N_s(\beta)$) tendremos una estimación de esta proporción, y por tanto de la magnificación en el punto β , dada por:

$$\mu_p(\beta) \approx \frac{N_s(\beta)}{N_r} \quad (3.7)$$

Esta expresión es solo válida si el tamaño de los píxeles es el mismo en ambos planos. En caso contrario tan solo habrá que introducir una constante de normalización. Esta constante se puede obtener fácilmente calculando la magnificación predicha por nuestra simulación en el caso en el que no haya lente.

Por otro lado, nótese que así obtenemos una estimación estadística de la magnificación. De hecho la igualdad se cumplirá para $N_r \rightarrow \infty$. La estimación en cada punto será mejor cuanto mayor sea el número de rayos que cae en el píxel. Por tanto, en las zonas de altas magnificación la estimación será muy buena (sobre todo en las cáusticas) mientras que en las zonas de baja magnificación será peor.

Finalmente, una vez calculado el mapa de magnificación para una fuente cuasi-puntual se puede calcular para una fuente cualquiera convolucionándolo según la ecuación (2.25). Un ejemplo del efecto sobre el mapa del tamaño de la fuente puede encontrarse en la figura 7.

El método explicado resulta muy sencillo de implementar, pero tiene el defecto de ser muy costoso computacionalmente. Estimemos el número de operaciones necesarias para calcular un mapa de magnificación.

Consideremos el caso de microlensing de cuásares. Aplicar una vez la ecuación de la lente conlleva un número de operaciones aproximado $N_* \times N_\alpha$, siendo N_* el número de microlentes consideradas en el mapa y N_α el número de operaciones necesarias para calcular $\alpha(\theta)$. Además esto habrá que hacerlo tantas veces como rayos se lancen, que serán N_r rayos por cada píxel. Entonces, en un mapa con N_{pix} píxeles, habrá que realizar un número de operaciones:

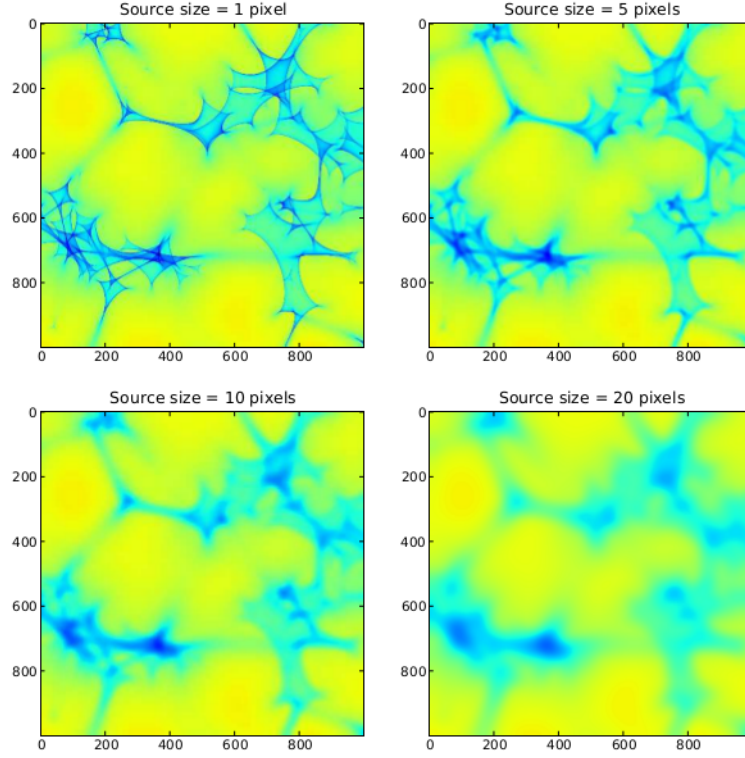


Figura 7: Efecto del tamaño de la fuente sobre un mapa de magnificación. Imagen obtenida de [1].

$$N_{op} \approx N_{pix} \times N_r \times N_* \times N_\alpha \quad (3.8)$$

Para mapas de magnificación de tamaño y calidad medios ($N_{pix} \sim 1000 \times 1000$, $N_r \sim 100$, $N_* \sim 1000$), aún tomando $N_\alpha = 1$, el resultado es enorme $N \sim 10^{11}$. Por otro lado, una ventaja de estas simulaciones es que son altamente paralelizables. Aún así, sería conveniente pensar en cómo mejorar el método disminuyendo alguno de los términos de la ecuación (3.8).

El número de píxeles depende de la resolución que queramos que tenga el mapa, y esto nos viene dado por el problema a tratar, luego no es posible mejorarlo. El número de operaciones para calcular $\alpha(\theta)$ puede ser mejorado, pero mejorarlo no lleva a una gran disminución de N_{op} .

Por otro lado, el número de estrellas parece estar también fijado por el problema. Pero resulta que sí se puede disminuir considerablemente, de hecho, esa es la base de los *treecodes*. La idea principal bajo estos algoritmos es combinar el efecto de las microlentes lejanas al rayo en grupos. Así, se considera el efecto gravitacional de un grupo como si fuera causado por un solo cuerpo mediante un desarrollo multipolar. Más información sobre estos algoritmos pueden ser encontrada en Wambsganss 1991 [19], 1999 [20].

Finalmente el número de rayos por píxel fija cómo de buena es la estimación de la magnificación. Mejorando el método con el que realizamos esta estimación se puede disminuir significativamente este número. El método del *Inverse Polygon Mapping* (IPM) logra esta tarea. Nótese que para calcular μ estamos comparando áreas asignándole todo el área correspondiente al píxel desde el que ha sido lanzado un rayo al píxel al que cae. Este

proceso es extremadamente ineficiente y puede ser mejorado transportando del plano del observador al de la fuente verdaderas áreas de prueba formada por rayos tirados en distintos píxeles. El procedimiento para hacer esto no es trivial, pero se consigue disminuir N_r en un factor 500-1000 sin disminuir la calidad de los mapas. Se puede encontrar más información sobre este método en Mediavilla et al. 2006 [21], 2011 [22]. Cabe destacar que este fue el algoritmo utilizado para realizar las simulaciones durante el estudio.

3.5 Detalles de la simulación de mapas de magnificación de microlensing

Ya sabemos simular mapas de magnificación en general, pero nosotros estamos interesados en mapas de magnificación de microlensing. Para realizar este tipo de mapas hay que tener algunos detalles en cuenta.

En primer lugar, es necesario especificar el tamaño de la zona de tiro de rayos en el plano imagen. Esta zona debe ser suficientemente grande como para que caigan rayos en toda la zona del plano de la fuente considerada en la simulación. Por otro lado, si es demasiado grande estaremos tirando muchos rayos en vano, ya que estos no caerán en la zona de estudio.

Tomemos un mapa de magnificación cuadrado de lado L . Por la acción de la lente, la correspondiente zona en el plano imagen será un rectángulo de lados $L_x = L / |1 - \kappa - \gamma|$ y $L_y = L / |1 - \kappa + \gamma|$. La acción de las microlentes es más impredecible. Para asegurarnos que la zona de tiro es suficientemente grande, añadiremos un factor 1.5 a los lados de este rectángulo.

Finalmente, nuestra zona de tiro será un rectángulo de lados:

$$\begin{aligned} L_x &= \frac{1.5L}{|1 - \kappa - \gamma|} \\ L_y &= \frac{1.5L}{|1 - \kappa + \gamma|} \end{aligned} \quad (3.9)$$

También habrá que especificar la zona en la que colocaremos de manera aleatoria las microlentes en el plano de la lente. Alrededor de cada rayo lanzado debe haber un cierto área cubierta de microlentes para tener en cuenta todas las contribuciones relevantes a la desviación del rayo. Si no es así, en los bordes del mapa habrá rayos que no se desvíen de forma correcta por la ausencia de microlentes “perdiéndose” un cierto número de estos.

Para tener en cuenta esto utilizaremos el resultado que Katz, Balbus & Paczynski 1986 [23] y Schneider & Weiss 1987 [24] obtuvieron independientemente. Según estos estudios, el tamaño mínimo necesario para perder menos de una fracción ϵ del número de rayos lanzados es.

$$L_*^{min} = \sqrt{\frac{\pi 3 \kappa_* \epsilon^{-1}}{|(1 - \kappa)^2 - \gamma^2|}} \quad (3.10)$$

Así pues, la zona en la que distribuiremos las microlentes será un cuadrado de lado:

$$L_* = \frac{1.5L}{\min |1 - \kappa \pm \gamma|} + L_*^{min} \quad (3.11)$$

En la mayoría de los casos κ_* es suficientemente pequeño y L es suficientemente grande como para despreciar el segundo término.

Aún habiendo tenido cuidado con esto, es conveniente recortar cierta cantidad de los laterales de los mapas de magnificación una vez simulados para así evitar efectos de borde.

Por último, hay que tener en cuenta que al desconocer la posición de las microlentes y situarlas en la simulación de manera aleatoria, necesariamente estamos haciendo un tratamiento estadístico del microlensing. Obtengamos una ecuación para calcular el número de microlentes que hay que posicionar considerando que todas tienen la misma masa.

Teniendo en cuenta la ecuación (2.12) y que la densidad superficial de materia debida a las estrellas es simplemente

$$\Sigma = \frac{N_* M}{D_d^2 L_*^2} \quad (3.12)$$

donde se ha tenido en cuenta que el tamaño del mapa es otra coordenada angular más. Se puede llegar a:

$$\kappa_* = \frac{\pi N_* M}{L_*^2} \implies N_* = \frac{\kappa_* L_*^2}{\pi M} = \frac{\alpha \kappa L_*^2}{\pi M} \quad (3.13)$$

Donde M debe estar en unidades de cierta masa de referencia M_0 y L_* en unidades de radios de Einstein para dicha masa. En esta última ecuación hay que tener cuidado de no confundir L_* con L , la densidad de materia está en el plano de la lente, no en el de la imagen.

Dado este tratamiento estadístico, lo que realmente nos interesará no será un mapa concreto, sino la probabilidad de que se produzca una cierta magnificación m en nuestro modelo de microlensing. Donde m es la magnificación en magnitudes definida por.

$$m = -2.5 \log_{10} (\mu) \quad (3.14)$$

Para ello utilizaremos el *histograma de magnificación*, que nos da una aproximación de esta probabilidad en forma de frecuencia de aparición de una magnificación concreta.

Para que un histograma de magnificación sea válido necesitamos dos cosas: suficiente estadística, y que esta sea significativa.

Para tener suficiente estadística solo es necesario tener un número de píxeles suficientemente alto. Esto no suele ser un problema, ya que la resolución del mapa nos obliga de inicio a tener bastantes píxeles. Por ejemplo, un mapa 1000×1000 nos aporta 10^6 datos a la estadística, con esto ya es suficiente.

Por otro lado, cómo de significativa es la estadística que nos aporta un mapa de magnificación depende del número de microlentes presentes en el mapa, ya que se podrán repetir más veces las distintas configuraciones a 2 o más cuerpos que provocarán cáusticas y zonas de baja magnificación en el mapa y que serán relevantes en la estadística del modelo. Debido a esto, cuanto mayor sea el tamaño del mapa de magnificación más estadística aporta.

Sin embargo, si la resolución requerida es muy alta (píxeles muy pequeños) tener muchas microlentes hace que se necesite mucho esfuerzo computacional para simularlo. Además, gran parte de las operaciones realizadas son en vano porque, para un rayo dado, la gran mayoría de las microlentes estarán muy lejos y sus efectos serán despreciables.

En estos casos resulta más óptimo simular muchos mapas más pequeños con distintas distribuciones de estrellas y unir la estadística de estos. El único requisito es que cada

mapa individual sea lo suficientemente grande y tenga suficientes microlentes como para que sea razonablemente significativo por sí solo. Está claro que con muchos mapas con una sola estrella no se puede reproducir un modelo de microlensing.

4 Comparación de la estadística de microlensing de una distribución bimodal extrema con una unimodal

En esta sección pasamos al verdadero objetivo del trabajo, que es comparar la estadística de microlensing dada por una distribución bimodal con razón de masas $\lambda = 100$ con una unimodal.

Una distribución bimodal es aquella que tiene dos poblaciones de estrellas con masas distintas. Llamando M_1 y M_2 a las masas de cada una de estas poblaciones en unidades de masas solares, diremos que tienen *razón de masas* λ porque se cumplirá:

$$\frac{M_2}{M_1} = \lambda \quad (4.1)$$

En nuestro caso tomaremos $\lambda = 100$ ya que queremos una distribución bimodal extrema.

Para asegurarnos de que ambas poblaciones tiene una relevancia parecida en la estadística de microlensing impondremos que la densidad superficial de masa que aportan (y por tanto la convergencia) sean iguales. Utilizando la ecuación (3.13) se puede relacionar λ con la relación entre el número de estrellas a tirar en el mapa de cada una de las poblaciones de la siguiente manera:

$$\kappa_1 = \kappa_2 \implies \frac{\pi N_1 M_1}{L_*^2} = \frac{\pi N_2 M_2}{L_*^2} \implies \frac{N_1}{N_2} = \lambda \quad (4.2)$$

Nótese que el número total de microlentes necesarias en un mapa con convergencia en forma de microlentes κ_* y lado L puede ser calculado como si fuese un unimodal con microlentes de masa M_{avg} , siendo $M_{avg} = \frac{N_1 M_1 + N_2 M_2}{N_1 + N_2}$ la media aritmética de las masa de la bimodal:

$$\kappa_* = \pi \frac{N_1 M_1 + N_2 M_2}{L_*^2} = \pi \frac{(N_1 + N_2) M_{avg}}{L_*^2} \implies N = \frac{\kappa_* L_*^2}{\pi M_{avg}} = \frac{\alpha \kappa L_*^2}{\pi M_{avg}} \quad (4.3)$$

Esta masa media se puede calcular de forma sencilla en función de una de las masas que aparecen, por ejemplo M_1 :

$$M_{avg} = \frac{2N_1 M_1}{(1 + \frac{1}{\lambda}) N_1} \implies M_{avg} = \frac{2M_1 \lambda}{\lambda + 1} \quad (4.4)$$

Así mismo, es sencillo encontrar la expresión con la que podemos calcular el número de estrellas de cada tipo en función del número de estrellas totales (N):

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{\lambda}{\lambda + 1} N \\ N_2 &= \frac{1}{\lambda + 1} N \end{aligned} \quad (4.5)$$

Este tipo de mapas tienen un problema añadido a la hora de simularlos. Recordemos la estadística de un mapa de magnificación es más significativa cuanto mayor sea el número de microlentes que contenga, ya que habrá más posibilidades de producir las distintas distribuciones relativas de microlentes. En este caso el número de microlentes verdaderamente relevante no es el número total N , sino el mínimo de N_1 y N_2 . Tomando $\lambda \geq 1$ se cumplirá que $\min \{N_1, N_2\} = N_2$.

Haciendo $\lambda \gg 1$ en la ecuación (4.5) llegamos a:

$$N_2 \approx \frac{N}{\lambda} \quad (4.6)$$

Esta ecuación nos indica que la “cantidad de estadística” que nos proporciona un mapa aumenta mucho más lento que el esfuerzo computacional necesario para simularlo en modelos de microlensing con distribuciones bimodales. En nuestro caso concreto, duplicar la estadística conllevaría hacer 200 veces más esfuerzo computacional.

En este caso se muestra claramente que si se quiere mejorar la estadística para un modelo de lente concreto con una distribución bimodal extrema, es mejor simular varios mapas pequeños que simular uno muy grande. Aún así, para asegurarnos que haya un número mínimo de microlentes con masa M_2 habrá que tener una cantidad relativamente elevada de microlentes con masa M_1 .

Por estas complicaciones es por lo que resulta muy interesante la posibilidad de reproducir las propiedades estadísticas de cualquier modelo bimodal con uno unimodal.

4.1 Metodología

Nos disponemos a comparar la estadística de una distribución bimodal extrema con una unimodal. Para ello compararemos los histogramas de magnificación generados por distintas distribuciones unimodales el generado por la bimodal.

Un detalle importante a tener en cuenta es que, por la degeneración masa-tamaño, para comparar dos histogramas hay que asegurarnos de que provienen de mapas con mismo tamaño físico del píxel. Es decir, habrá que mantener la cantidad $\frac{N_{pix}}{L^2}$ constante en cada uno de los mapas que simulemos.

Para comparar histogramas se utilizó una función χ^2 de tipo Pearson, definida de la siguiente manera:

$$\chi_{AB}^2 = \sum_m \frac{[h_A(m) - h_B(m)]^2}{h_A(m) + h_B(m)} \quad (4.7)$$

Donde $h_X(m)$ es el valor del histograma del modelo X para una magnificación concreta. La suma recorre todos los valores de m para los que se haya calculado el valor del histograma. Computacionalmente habrá que tener en cuenta solo los valores de m para los cuales al menos uno de los dos histogramas sea no nulo.

Nótese que esta medida de “distancia” entre histogramas es relativa, es decir, no podemos saber qué valores de χ^2 serán altos o bajos por sí solos, ya que a priori no hay ninguna referencia bien fijada. Lo único que podemos saber es que, a mayor χ^2 , mayor será la diferencia entre ambos histogramas.

En la definición de este χ^2 se ha asumido que cada valor $h_X(m)$ de un histograma de magnificación obedece una distribución de Poisson (recordemos que nuestra simulación nos da una estimación estadística de dicho valor), y por tanto podemos tomar la varianza de dicho valor como el valor en sí mismo ($\sigma_X^2(m) = h_X(m)$). Para poder tener en cuenta el caso en el que el valor de uno de los histogramas se anula y el otro no, se tomó como denominador en la definición la media de los valores de los histogramas. El factor 2 añadido por dicha media puede ser omitido porque un cierto valor de χ^2 será utilizado para comparar la concordancia de varios modelos con uno dado.

Especificado esto, para comprobar qué modelo unimodal devuelve una estadística más parecida a la de la bimodal, se calcula este χ^2 entre dicha bimodal y distintos modelos de unimodales. Discutamos qué parámetros vamos a variar en los modelos unimodales.

Nótese que el tamaño de la fuente r_s debe ser el mismo para ambos modelos porque queremos comparar la estadística de microlensing para una misma fuente. Es decir, todos los mapas serán convolucionados con una fuente (tomada como gaussiana por simplicidad computacional) del mismo tamaño.

Así mismo, κ y γ deben ser idénticos en ambos modelos para asegurarnos de que devuelven la misma magnificación media (véase la ecuación (2.23)).

Por tanto los parámetros que debemos variar en los distintos modelos unimodales α y M .

El mapa bimodal que usamos tendrá como parámetros $\alpha = 0.4$, $M_1 = 0.3 M_\odot$ y $M_2 = 30 M_\odot$. Se espera que el *unimodal* resultante no se aleje demasiado de estos parámetros. Parecería razonable pensar que se ha de recuperar una masa más cercana a $0.3 M_\odot$ que a $30 M_\odot$, ya que hay más estrellas del primer tipo.

A la luz de esto, en primera instancia se tomaron los siguientes valores para el retículo en α y M :

α	0.15	0.25	0.35	0.45	0.55	
M/M_\odot	0.5	1.0	2.0	4.0	8.0	16.0

Se tomó una escala logarítmica en base 2 en M y lineal con paso 0.1 en α .

Tras obtener unos primeros resultados preliminares y localizar aproximadamente el mínimo χ^2 se refinó el retículo para mejorar la resolución alrededor este. Los valores definitivos del retículo son:

α	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.45	0.55
M/M_\odot	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	8.0	16.0

En este texto trabajaremos solo con el retículo mejorado por brevedad.

4.2 Simulación de los mapas de los mapas de magnificación de microlensing

Empecemos comentando la simulación de los mapas.

Los parámetros comunes de todos ellos son los siguientes:

- $\kappa = \gamma = 0.55$
- $N_{pix} = 1550 \times 1550 \rightarrow N'_{pix} = 1500 \times 1500$

- $L = 62 \theta_E^{1M_\odot} \rightarrow L' = 60 \theta_E^{1M_\odot}$
- $r_s = 6.25$ píxeles
- $N_r = 1$
- $\epsilon = 0.05$

Donde N'_{pix} y L' son los valores tras recortar los bordes del mapa de magnificación y $\theta_E^{1M_\odot}$ es el radio de Einstein para $1 M_\odot$

Estos valores de κ y γ se escogieron porque maximizan los efectos de la bimodalidad, véase Schechter et al. 2004 [25]

Nótese que con estos valores, el tamaño físico de cada píxel será de unos $0.04 \theta_E^{1M_\odot}$. En un sistema típico de microlensing de cuásares se puede estimar que este radio de Einstein equivale a una longitud en el plano de la fuente de unos 20 días-luz, luego la longitud física del píxel será de 0.8 días-luz. Esto justifica el valor tomado para r_s ya que corresponde a 5 días-luz, que es un radio típico de los estimados para el disco de acreción de un cuásar (véase Jiménez-Vicente et al. 2012 [26])

En primer lugar se simuló el mapa de magnificación de la distribución bimodal. Debemos asegurarnos de que tenemos suficiente estadística de este modelo.

Los valores concretos tomados para este mapa, ya adelantados anteriormente, son:

- $\alpha = 0.4$
- $M_1 = 0.3 M_\odot \implies M_2 = 30 M_\odot$

Utilizando la ecuación (4.4) para estos valores se obtiene que $M_{avg} = 0.594 M_\odot$. Haciendo uso ahora de la ecuación (4.3) se obtiene que se deben colocar $N = 106468$ microlentes. Aplicando ahora la ecuación (4.5) se llega a que $N_1 = 105414$ de estas deben tener masa $M_1 = 0.3 M_\odot$ y $N_2 = 1054 M_\odot$ tendrán $M_2 = 30 M_\odot$.

Aunque 1054 ya son un buen número de estrellas, se tiraron 5 mapas con distinta distribución espacial de las microlentes para asegurarnos de que la estadística de este modelo está bien determinada.

En la figura 8 se puede ver uno de los mapas de magnificación simulados. Esto sirve para hacernos a una idea de la forma de las cáusticas y otras estructuras que encontramos. Se observa como las cáusticas de las microlentes más masivas (estiradas por el *shear*) tienden a agrupar y estirar las cáusticas de las microlentes menos masivas. Esto no se puede reproducir con un unimodal. Entonces, si se logra encontrar un caso que devuelva una estadística muy similar a la obtenida de la bimodal, se habrá comprobado que estas estructuras no son estadísticamente relevantes.

Una vez simulados los 5 mapas se calculó el histograma resultante. El resultado se presenta en la figura 9.

En el caso de la distribución unimodal, dada la ecuación (3.13), sabemos que el número de microlentes en el mapa es directamente proporcional a α e inversamente proporcional a M . Así pues, el mayor número de microlentes se encontrará para el mapa con $\alpha = 0.55$ y $M = 0.5 M_\odot$, para el cual tendremos $N = 175223$ microlentes, una cantidad más que suficiente. Del mismo modo, se encontrará el menor número de microlentes para $\alpha = 0.15$ y $M = 16 M_\odot$, en cuyo caso este número es $N = 1457$. Para asegurarnos de tener buena

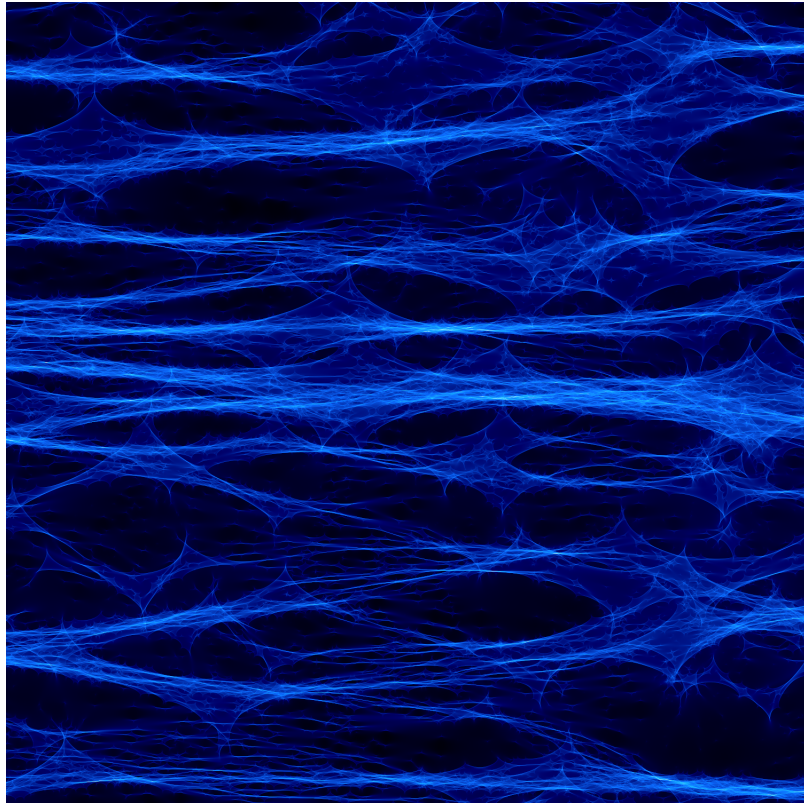


Figura 8: Mapa de magnificación de la distribución bimodal.

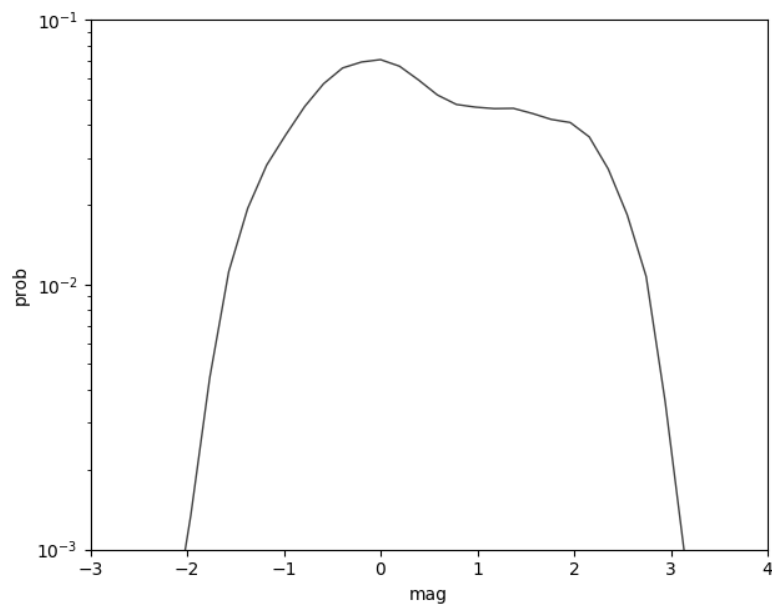


Figura 9: Histograma de microlensing de la distribución bimodal.

		M/M_{\odot}						
		0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	8.0	16.0
α	0.15	0.4968	0.1338	0.0099	0.0133	0.0353	0.1056	0.1130
	0.20	0.4279	0.1300	0.0046	0.0078	0.0165	0.1078	0.0877
	0.25	0.4009	0.1428	0.0169	0.0081	0.0138	0.0495	0.0898
	0.30	0.3850	0.1549	0.0282	0.0120	0.0108	0.0309	0.1172
	0.35	0.3812	0.1490	0.0464	0.0257	0.0188	0.0278	0.1012
	0.45	0.3734	0.1910	0.0922	0.0586	0.0304	0.0466	0.0607
	0.55	0.3849	0.2405	0.1049	0.0859	0.0667	0.1014	0.1229

Tabla 1: Valores del χ^2 obtenido para los distintos histogramas de magnificación de modelos unimodales al compararlos con el modelo bimodal.

estadística, al igual que en el caso bimodal se simularon 5 mapas de magnificación para los casos con $M \geq 8 M_{\odot}$.

En la figura 10 se presentan algunos de los mapas de magnificación simulados para distribuciones unimodales. Se puede observar que al aumentar M el mapa de magnificación presenta menos cáusticas pero más grandes, si aumentamos α encontramos más cáusticas con tamaños similares.

Nótese que los casos con masa baja tienen muchas microlentes luego otro mapa con distinta distribución aleatoria de estas no sería muy distinto. Sin embargo, para masas altas hay menos microlentes y el mapa de magnificación será susceptible a cambios debidos a la posición aleatoria en la que estas se hayan posicionado.

Además, en la figura 11 se representan los correspondientes histogramas. Se observa que la anchura del histograma aumenta drásticamente con la masa del modelo. Esto tiene sentido ya que al ser las microlentes más masivas producirán magnificaciones más extremas.

4.3 Análisis de los histogramas y conclusiones

Tras haber simulado todos los histogramas de magnificación pasamos al análisis de estos.

Calculando el χ^2 de cada uno de los histogramas unimodales con el bimodal obtenemos los valores que se muestran en la tabla 1.

Se observa que el menor valor del χ^2 se da para $\alpha = 0.2$ y $M = 2 M_{\odot}$. En la figura 12 se presenta el histograma de magnificación para este caso unimodal junto al del bimodal. En ella se pueden observar que son muy similares. Para estos dos histogramas se encuentra que $\chi^2 = 0.0046$. Para hacernos una idea de como de pequeño es este valor, calculamos el χ^2 entre los dos primeros histogramas en la figura 11, correspondientes a $M = 0.5 M_{\odot}$ y $\alpha = 0.15$ y a $M = 0.5 M_{\odot}$ y $\alpha = 0.30$. Estos dos modelos son muy cercanos en cuanto a parámetros se refiere y sus histogramas se ven muy parecidos a simple vista. Sin embargo, el valor hallado es $\chi^2 = 0.0165$, bastante mayor que el mínimo encontrado entre la bimodal y la unimodal que mejor se ajusta.

Una buena forma de interpretar los datos de la tabla 1 en su conjunto es representarlos en un mapa de isolíneas.

En la figura 13 se muestra el mapa de isolíneas correspondiente a los valores del χ^2 reducido. En un ajuste de χ^2 reducido se tiene que el nivel de confianza de los parámetros

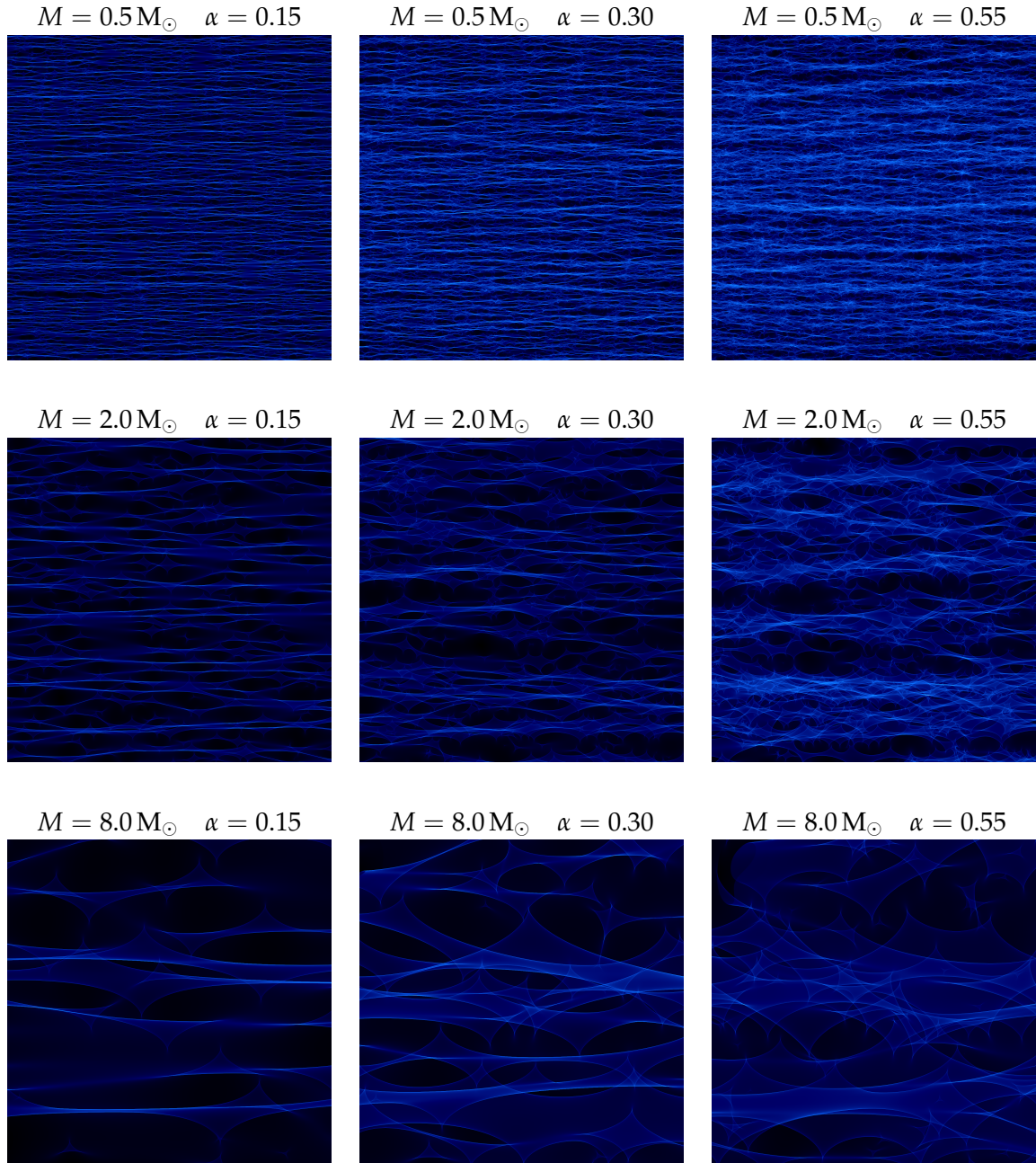


Figura 10: Ejemplos de mapas de magnificación con distribución unimodal.

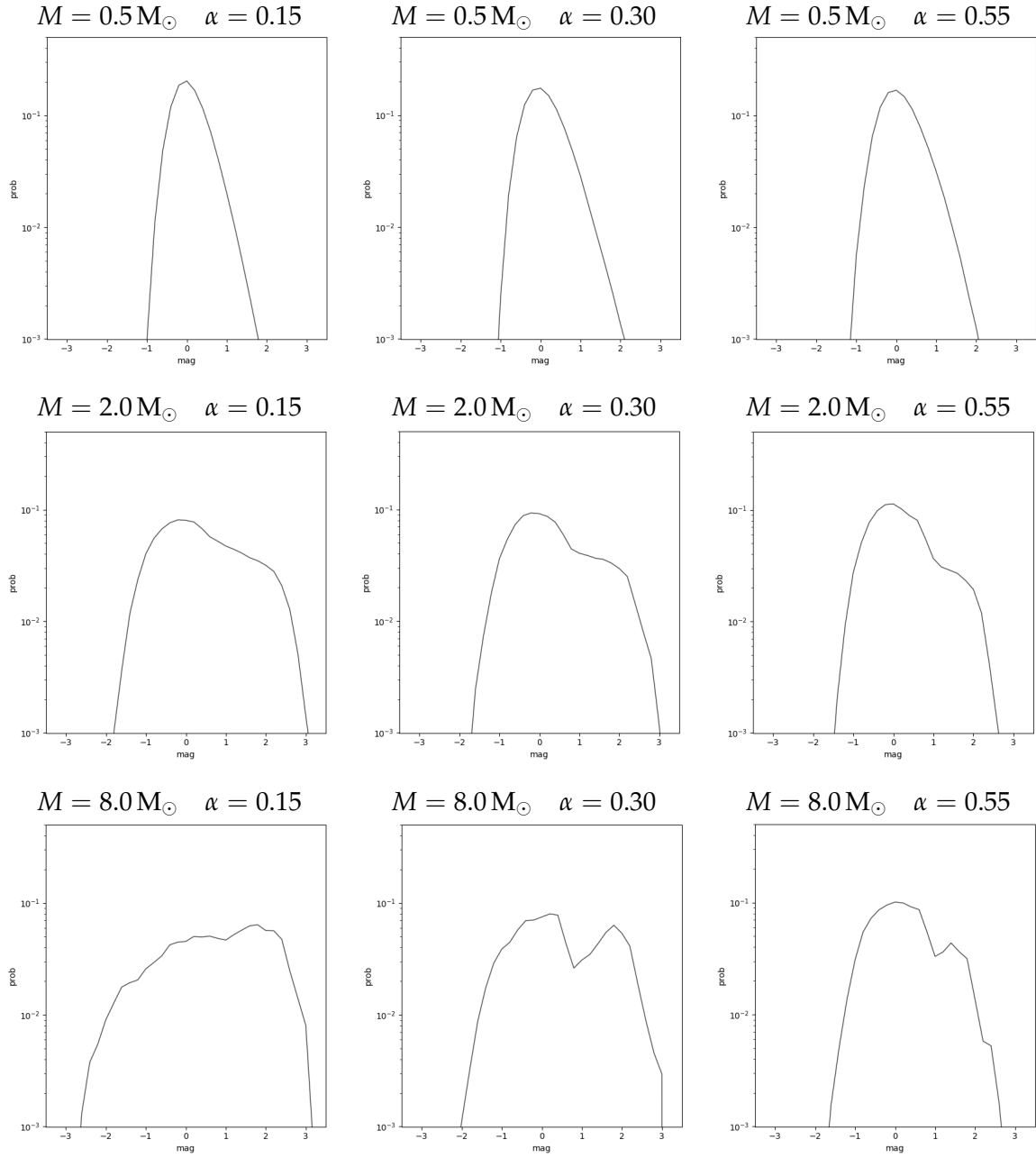


Figura 11: Histogramas de algunos casos con distribución unimodal.

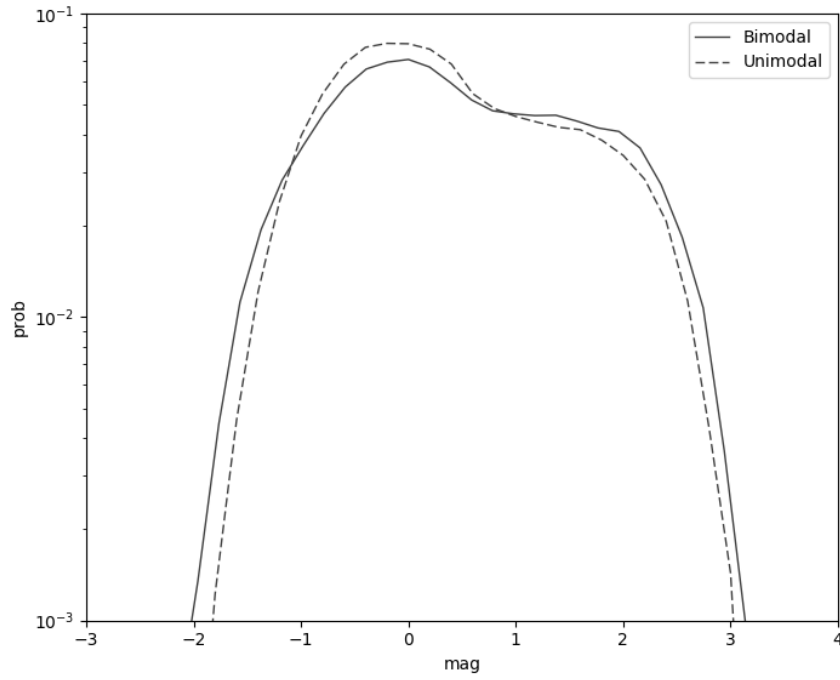


Figura 12: Comparación entre el histograma del modelo bimodal y el del unimodal con menor χ^2

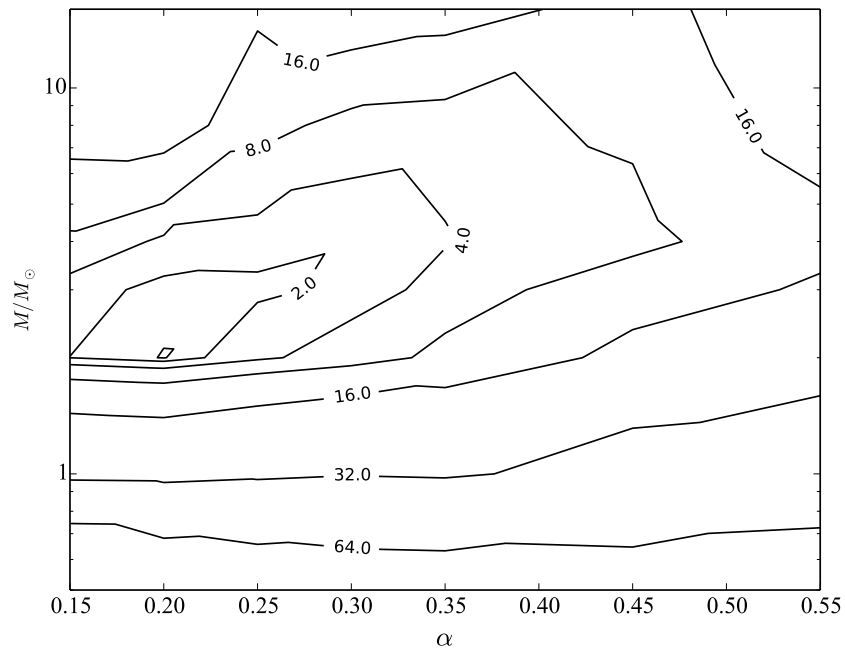


Figura 13: Mapa de isolíneas obtenido de los datos de χ^2 reducido

a un sigma es el que hace aumentar el χ^2 de 1 (valor mínimo) a 2. Así pues, vemos que la masa y la fracción de microlentes que más se asemejan a la bimodal extrema estarán en el rango $2 M_{\odot} < M < 4 M_{\odot}$ y $0.15 < \alpha < 0.30$ respectivamente.

Una conclusión importante que se obtiene de estos resultados es que el rango de valores de M obtenido para las microlentes de la unimodal no está cerca ni del valor de las microlentes menos masivas ni del de las más masivas. Esto que parece una trivialidad tiene sus implicaciones, como veremos con la aplicación de estos resultados al estudio de los agujeros negros primordiales como materia oscura en la sección 5.

Imaginemos que tenemos una distribución unimodal con masa M . Ahora introducimos otra población de microlentes con masa mucho mayor que las que ya se tenían, en mucho menor número, pero con una contribución a la masa total del sistema parecida. Extrapolando los resultados obtenidos está claro que la estadística de microlensing cambiará sustancialmente, es decir, el microlensing de cuásares resulta ser sensible a la presencia de un pequeño número de objetos muy masivos.

Otra conclusión a destacar es que la media aritmética de las masas de las microlentes en el modelo bimodal no entra en el rango de masas permitidas para la unimodal, como podría haberse esperado intuitivamente. Sin embargo, la media geométrica de las masas de las dos poblaciones de microlentes sí que está en este intervalo.

5 Aplicación al estudio de PBH como materia oscura

Finalmente vamos a presentar una aplicación práctica del estudio realizado en este trabajo a un caso concreto de gran actualidad científica. Se trata del dilema de si los agujeros negros primordiales (PBH) pueden formar parte de la llamada materia oscura.

Los agujeros negros cumplen la mayoría de las propiedades que debe tener un objeto que forme parte de la llamada materia oscura (son no relativistas, a efectos prácticos casi no interactúan con otros objetos, etc), una extensa discusión de este tema puede ser encontrada en Clesse & García-Bellido 2016 [27].

Se distinguen tres tipos de agujeros negros según su origen.

- Agujeros negros estelares.

Como su nombre indica, son formados por el colapso de una estrella muy masiva. Se estima que sus masas deben estar en el rango $5 M_{\odot} \lesssim M \lesssim 15 M_{\odot}$. En realidad se pueden formar agujeros negros de este tipo más masivos, pero se necesitan unas condiciones iniciales muy concretas.

Que este tipo de agujeros negros formen una importante fracción de la materia oscura del Universo está descartado debido a que los modelos de formación estelar limitan su abundancia.

- Agujeros negros supermasivos.

Son agujeros negros tan masivos que no pueden ser de origen estelar. En la actualidad se han detectado agujeros negros de este tipo con masas en el rango $10^5 M_{\odot} \lesssim M \lesssim 10^{10} M_{\odot}$. Se suelen encontrar agujeros negros de este tipo en el centro de algunas galaxias.

Estos agujeros negros no son considerados buenos candidatos a materia oscura por numerosas razones. Si estos fueran tan abundantes como para poder constituir gran

parte de la materia oscura, producirían distorsiones en el *fondo cósmico de microondas* (CMB) y disturbarían los sistemas de estrellas binarias de alta separación. Además, algunos de ellos son detectables porque emiten en rayos X (AGNs), sin embargo no se observan tantos como debiera haber.

- Agujeros negros primordiales.

Estos hipotéticos agujeros negros habrían sido formados en el Universo primigenio debido al colapso de grandes fluctuaciones en la densidad de materia en este. El único límite teórico existente a sus masas es que esta debe ser en la actualidad mayor que 5×10^{11} kg, ya al tener menor masa estos se habrían evaporado en forma de radiación de Hawking en un tiempo menor que la edad del Universo. Otra posibilidad es que sobrevivieran en forma de remanentes debido a procesos desconocidos en la escala de Planck, pero esta posibilidad está muy discutida porque estos remanentes presentan diversas patologías.

Se han realizado numerosas observaciones que limitan la abundancia de estos objetos. Agujeros negros con $M \lesssim 1 M_{\odot}$ han sido descartados por experimentos de microlensing galáctico (aunque estos no son definitivos). Aquellos con $M \gtrsim 200 M_{\odot}$ se descartan por observaciones del fondo cósmico de microondas y porque destruirían los sistemas de estrellas binarias de gran separación. Sin embargo, no hay cotas sólidas para los agujeros negros de masa intermedia ($1 M_{\odot} \lesssim M \lesssim 200 M_{\odot}$).

Históricamente no se ha profundizado mucho en la idea de los agujeros negros primordiales como materia oscura. Sin embargo, la detección de ondas gravitacionales en 2015 (véase Abbott et al. 2016 [28]) causadas por dos agujeros negros con masas $\sim 30 M_{\odot}$ fusionándose en uno con masa $\sim 60 M_{\odot}$ ha revivido esta idea. Como se ha mencionado, agujeros negros estelares de tan alta masa son difíciles de formar, luego la idea de que estos puedan ser de origen primordial y constituir el grueso de la materia oscura ha vuelto a ser tenida en consideración.

En Mediavilla et al. 2017 [29] se utilizan datos de 24 cuásares afectados por efecto lente para poner límites a la masa y abundancia agujeros negros primordiales de masa intermedia.

Se comparan los datos ya mencionados con modelos de microlensing con distribución unimodal como los utilizados a lo largo de este trabajo variando α y r_s . Gracias a la degeneración masa-tamaño, estimando el tamaño del cuásar de manera independiente (en este caso mediante técnicas de *reverberation mapping*), se puede asignar a cada valor de r_s otro de M .

Calculando la distribución de probabilidad de que los datos utilizados pertenezcan a un modelo de microlensing con α y M logran obtener estos dos resultados:

1. La probabilidad de encontrar objetos compactos fuera del rango $0.05 M_{\odot} \lesssim M \lesssim 0.45 M_{\odot}$ es prácticamente despreciable.
2. La abundancia de objetos en este rango de masas representa el $20\% \pm 5\%$ de la masa total.

Nótese que estos dos resultados están de acuerdo con las masas y abundancias típicas de estrellas en una galaxia. Esto lleva a descartar los agujeros negros de masa intermedia como parte importante de la materia oscura.

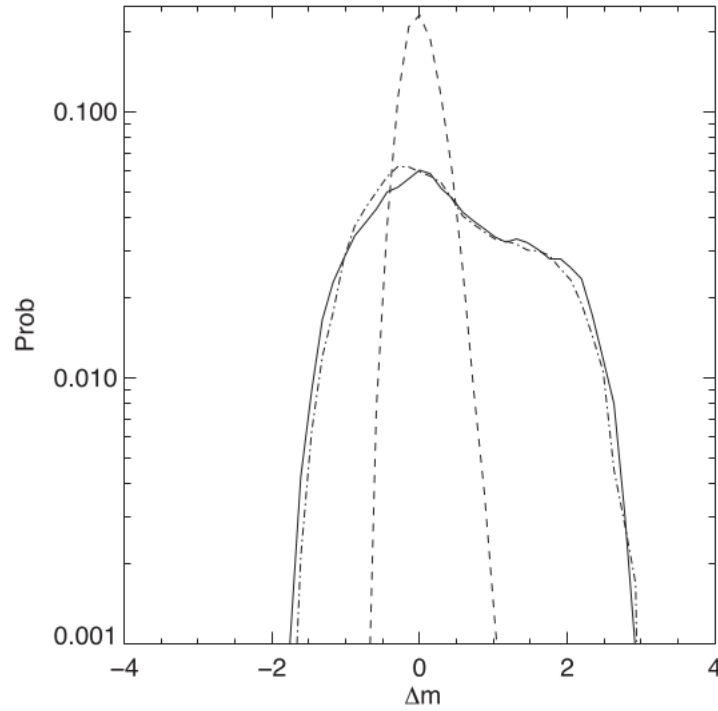


Figura 14: Comparación entre el histograma de magnificación de la bimodal (línea continua), de la unimodal que mejor se ajusta (línea punteada), y de la unimodal con $M = 0.3 M_{\odot}$ y $\alpha = 0.2$ (línea discontinua).

La aportación a este artículo hecha por el estudio realizado a lo largo de la sección 4 se encuentra en el detalle de que se utilizaron distribuciones unimodales para describir un sistema que podría ser intrínsecamente bimodal: por un lado tendríamos estrellas con masas típicas de $0.3 M_{\odot}$ y por otro agujeros negros con masas alrededor de $30 M_{\odot}$. No es casualidad que estos valores coincidan con los de la distribución bimodal estudiada en este texto. De hecho también el valor de $\alpha = 0.4$ pretende asemejar la situación. Sabemos que, en las posiciones en las que se encuentran las imágenes de los cuásares, alrededor del 20 % de la materia en una galaxia está compuesta por estrellas (el resto debiera ser materia oscura). En nuestro análisis relajamos esta condición a que tan solo formen otro 20 % de la masa total.

Aún habiendo relajado esta condición, en la sección 4.3 se llega a la conclusión de que el microlensing es totalmente capaz de diferenciar la situación en la que solo hay estrellas con la otra en la que también hay agujeros negros como los detectados por LIGO. De existir estos objetos en tales cantidades, la masa recuperada en el estudio con distribuciones unimodales debería encontrarse cerca de $M = 2.0 M_{\odot}$. Sin embargo el artículo se halla que las microlentes con masas de este orden están totalmente descartadas por las observaciones.

Para ver esto aún más claro, se simuló la distribución unimodal para $M = 0.3 M_{\odot}$ y $\alpha = 0.2$. El histograma de microlensing de esta distribución se muestra en la figura 14 junto con el histograma de la bimodal y el de la unimodal que mejor se ajusta a este.

Se comprueba que si existiera tan solo un 20 % de masa en forma de agujeros negros de $30 M_{\odot}$, la distribución de probabilidad sería muy diferente a la de una unimodal con

$M = 0.3 M_{\odot}$ y $\alpha = 0.2$ como la recuperada.

Por último, nótese que como ya se dijo con anterioridad, en este caso la posibilidad de usar distribuciones más simples para simular los mapas de microlensing facilita enormemente la tarea. Recordemos que, como ya se demostró en la sección 4, simular mapas bimodales es mucho más complejo que simular mapas con un solo tipo de microlentes.

6 Conclusiones

A lo largo de este trabajo queda claro que el efecto lente gravitatoria es un fenómeno de gran utilidad y aplicabilidad a los problemas de la Astrofísica y la Cosmología. Es típico en física encontrarse con un fenómeno el cual se cree que nunca se podrá detectar experimentalmente y que, con el paso de los años y la mejora de la tecnología, acaba siendo una herramienta de gran utilidad para la investigación.

El estudio realizado en este trabajo apoya la idea de que las propiedades estadísticas de microlensing de cualquier distribución bimodal (o incluso más compleja) puede reproducirse por una unimodal.

Pero la conclusión más interesante es que el microlensing de cuásares es sensible a la presencia de una cantidad relevante (en términos de la densidad superficial de la galaxia) de microlentes muy masivas, aunque el número de estas sea muy reducido en comparación con la gran abundancia de las microlentes más ligeras.

Esta conclusión nos ha llevado a una aplicación práctica directa de este estudio en un tema tan interesante y tan actual como es el de los agujeros negros primordiales como materia oscura.

Referencias

- [1] Mediavilla, E.; Muñoz, J.A.; Garzón, F. & Mahoney, T.J.
Astrophysical Applications of Gravitational Lensing, XXIV Canary Islands Winter School of Astrophysics
Cambridge University Press, 2016. ISBN: 9781107078543
- [2] Schneider, P.
Gravitational Lensing: Strong, Weak and Micro. Part 1: Introduction to Gravitational Lensing and Cosmology,
Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [3] Weinberg, S.
Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity,
John Wiley & Sons, 1972.
- [4] Walsh, D.; Carswell, R. F.; Weymann, R. J.
0957 + 561 A, B - Twin quasistellar objects or gravitational lens,
Nature, vol. 279, May 31, 1979, p. 381-384.
- [5] Lynds, R.; Petrosian, V.
Giant Luminous Arcs in Galaxy Clusters,
Bulletin of the American Astronomical Society, Vol. 18, p.1014, 1986.
- [6] Soucail, G., Fort, B., Mellier, Y., and Picat, J. P.
A Blue Ring-like Structure in the Center of the A 370 Cluster of Galaxies,
Astron. & Astrophys. 1987 vol. 172 p. L14-L16
- [7] Hewitt, J. N.; Turner, E. L.; Schneider, D. P.; Burke, B. F.; Langston, G. I.
Unusual radio source MG1131+0456 - A possible Einstein ring,
Nature (ISSN 0028-0836), vol. 333, June 9, 1988, p. 537-540.
- [8] Irwin, M. J., Webster, R. L., Hewett, P. C., Corrigan, R. T., & Jędrzejewski, R. I.
Photometric variations in the Q2237 + 0305 system - First detection of a microlensing event,
Astronomical Journal (ISSN 0004-6256), vol. 98, Dec. 1989, p. 1989-1994.
- [9] Tyson, J. A., Valdes, F., & Wenk, R. A.
Detection of systematic gravitational lens galaxy image alignments - Mapping dark matter in galaxy clusters,
Astrophysical Journal, Part 2 - Letters (ISSN 0004-637X), vol. 349, Jan. 20, 1990, p. L1-L4.
- [10] Alcock, C.; Akerlof, C. W.; Allsman, R. A.; Axelrod, T. S.; Bennett, D. P.; Chan, S.; Cook, K. H.; Freeman, K. C.; Griest, K.; Marshall, S. L.; Park, H-S.; Perlmutter, S.; Peterson, B. A.; Pratt, M. R.; Quinn, P. J.; Rodgers, A. W.; Stubbs, C. W. & Sutherland, W.
Possible gravitational microlensing of a star in the Large Magellanic Cloud
Nature 365, 621 - 623, 1993.

- [11] Aubourg, E.; Bareyre, P.; Bréhin, S.; Gros, M.; Lachièze-Rey, M.; Laurent, B.; Lesquoy, E.; Magneville, C.; Milsztajn, A.; Moscoso, L.; Queinnec, F.; Rich, J.; Spiro, M.; Vigroux, L.; Zylberajch, S.; Ansari, R.; Cavalier, F.; Moniez, M.; Beaulieu, J.-P.; Ferlet, R.; Grison, Ph.; Vidal-Madjar, A.; Guibert, J.; Moreau, O.; Tajahmady, F.; Maurice, E.; Prévôt, L. & Gry, C.
Evidence for gravitational microlensing by dark objects in the Galactic halo,
Nature 365, 623 - 625, 1993.
- [12] Blau, K.S.
A gravitational-lensing measurement of the Hubble constant
Physics Today 70, 4, 24 (2017); doi: 10.1063/PT.3.3518
- [13] Congdon, A. B., Keeton, C. R., & Osmer, S. J.
Microlensing of an extended source by a power-law mass distribution
MNRAS, 376, 263 (2007)
- [14] Wyithe, J. S. B., & Turner, E. L.
Determining the microlens mass function from quasar microlensing statistics
MNRAS, 320, 21 (2001)
- [15] Mediavilla, E.; Muñoz, J. A.; Falco, E.; Motta, V.; Guerras, E.; Canovas, H.; Jean, C.; Oscoz, A. & Mosquera, A. M.
Microlensing-based estimate of the mass fraction in compact objects in lens galaxies,
The Astrophysical Journal, Volume 706, Number 2 (2009)
- [16] Schneider, P.; Weiss, A.
The two-point-mass lens - Detailed investigation of a special asymmetric gravitational lens
Astronomy and Astrophysics (ISSN 0004-6361), vol. 164, no. 2, Aug. 1986, p. 237-259.
- [17] Schneider, P.
An analytically soluble problem in fully nonlinear statistical gravitational lensing
Astrophysical Journal, Part 1 (ISSN 0004-637X), vol. 319, Aug. 1, 1987, p. 9-13.
- [18] Kayser, R.; Refsdal, S.; Stabell, R.
Astrophysical applications of gravitational micro-lensing
Astronomy and Astrophysics (ISSN 0004-6361), vol. 166, no. 1-2, Sept. 1986, p. 36-52.
- [19] Wambsganss, J.
Gravitational Microlensing
Ph.D. Thesis, Ludwig-Maximilians University, Munich (1990)
- [20] Wambsganss, J.
Gravitational lensing: numerical simulations with a hierarchical tree code
Journal of Comp. and App. Math. , 109, 353-372 (1999)
- [21] Mediavilla, E.; Muñoz, J. A.; Lopez, P.; Mediavilla, T.; Abajas, C.; Gonzalez-Morcillo, C. & Gil-Merino, R.
A Fast and Very Accurate Approach to the Computation of Microlensing Magnification Patterns Based on Inverse Polygon Mapping
ApJ , 653, 942 (2006)

- [22] Mediavilla, E., Mediavilla, T., Muñoz, J. A., Ariza, O., López, P., González- Morcillo, C., Jiménez-Vicente, J.
New Developments on Inverse Polygon Mapping to Calculate Gravitational Lensing Magnifications Maps. Optimized Computations,
ApJ , 741, Iss. 1, art. id. 42 (2011)
- [23] Katz, N.; Balbus, S. & Paczynski, B.
Random scattering approach to gravitational microlensing,
Ap. J., 317, 11 (1986)
- [24] Schneider, P.; Weiss, A.
A gravitational lens origin for AGN-variability? Consequences of micro-lensing
Astronomy and Astrophysics (ISSN 0004-6361), vol. 171, no. 1-2, Jan. 1987, p. 49-65.
- [25] Schechter, P. L.; Wambsganss, J. & Lewis, G. F.
Qualitative aspects of quasar microlensing with two mass components: magnification patterns and probability distributions,
The Astrophysical Journal, Volume 613, Number 1 (2004)
- [26] Jiménez-Vicente, J.; Mediavilla, E.; Muñoz, J. A. & Kochanek, C. S.
A robust determination of the size of quasar accretion disks using gravitational microlensing,
The Astrophysical Journal, Volume 751, Number 2 (2012)
- [27] Clesse, S. & García-Bellido, J.
The clustering of massive Primordial Black Holes as Dark Matter: measuring their mass distribution with Advanced LIGO
Physics of the Dark Universe, 10, 002 (2016)
- [28] B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration)
Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger
Phys. Rev. Lett. 116, 061102 (2016)
- [29] Mediavilla, E.; Jiménez-Vicente, J.; Muñoz, J. A.; Vives-Arias, H. & Calderón-Infante, J.
Limits on the Mass and Abundance of Primordial Black Holes from Quasar Gravitational Microlensing
ApJL, 836, L18 (2017)
- [30] Volker Beckmann, Chris R. Shrader,
The AGN phenomenon: open issues,
Proc. of "An INTEGRAL view of the high-energy sky (the first 10 years)"(2013)
Publicado online: <https://pos.sissa.it/cgi-bin/reader/contribution.cgi?id=176/069>
- [31] Paul C. Hewett, Vivienne Wild,
Improved redshifts for SDSS quasar spectra,
Mon. Not. R. Astron. Soc. 2010; 405 (4): 2302-2316.