



**UNIVERSIDAD  
DE GRANADA**

---

Facultad de Ciencias

GRADO EN FÍSICA

TRABAJO FIN DE GRADO

**Estudio teórico del fenómeno  
de scattering electromagnético**

Presentado por:  
**D./D<sup>a</sup>. Zewei Wang Chen**

Curso Académico 2019/20

# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Fundamentos teóricos</b>	<b>7</b>
2.1	Las ecuaciones macroscópicas de Maxwell. . . . .	7
2.2	Condiciones de contorno . . . . .	8
2.3	Soluciones de las ecuaciones de Maxwell en medios homogéneos . . . . .	9
2.3.1	Onda plana armónica . . . . .	9
2.3.2	Onda esférica armónica . . . . .	10
2.4	El teorema de Poynting . . . . .	10
2.5	Los parámetros de Stokes en una onda plana . . . . .	12
2.5.1	La matriz coherencia en una onda plana . . . . .	14
2.6	El tensor de Poynting-Stokes . . . . .	15
2.7	Campos electromagnéticos policromáticos . . . . .	16
2.8	Estudio del efecto de <i>Scattering</i> por objetos finitos compactos . . . . .	17
2.8.1	Calculando el término de <i>scattering</i> . . . . .	18
2.8.2	El operador transición diádica . . . . .	19
2.8.3	<i>Scattering</i> monocromático por objetos compactos . . . . .	19
2.8.4	<i>Scattering</i> policromático por objetos compactos . . . . .	20
2.9	<i>Scattering</i> en la zona de campo lejano . . . . .	21
2.9.1	Criterios teóricos para el límite del campo lejano . . . . .	23
2.9.2	Operador <i>scattering</i> diádico y matriz amplitud de <i>scattering</i> . . . . .	24
2.9.3	Vector Poynting del campo total en régimen de campo lejano . . . . .	26
2.9.4	La matriz fase . . . . .	28
2.9.5	La matriz de extinción . . . . .	29
2.10	El método de la matriz-T y la teoría de Lorenz-Mie . . . . .	30
2.10.1	La matriz-T . . . . .	30
2.10.2	La teoría de Lorenz-Mie . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Conclusion</b>	<b>33</b>
<b>4</b>	<b>Apéndice</b>	<b>34</b>
4.1	El producto diádico . . . . .	34
4.2	El operador y la función de Green . . . . .	35
4.3	Escalares y vectores armónicos esféricos . . . . .	35
	<b>Referencias</b>	<b>37</b>

## Resumen

El fenómeno de dispersión o *scattering* electromagnético se produce cuando una onda de luz interacciona con la materia, los átomos o moléculas que los componen absorben la energía y a continuación lo remite en diferentes direcciones con una intensidad diferente.

El objetivo aquí es estudiar desde el punto de vista electromagnético las características y propiedades de dicho fenómeno, es por ello, por lo que comenzaremos repasando las bases del electromagnetismo, es decir las ecuaciones de Maxwell, el teorema de Poynting, las ondas planas, las ondas esféricas etc .

Una vez introducidas las bases teóricas veremos como se puede describir el campo dispersado mediante, algunas herramientas matemáticas como son, el operador de Green, el operador transición diádica ,a continuación se estudiará las características de un campo dispersado, en régimen de campo lejano y finalizaremos con el método de la matriz-T y la teoría de Lorenz-Mie, que se trata de una particularización de la matriz T, aunque esta última parte, debido a que se trata de una teoría un tanto extensa realizaremos simplemente una breve descripción de sus ideas principales.

## Abstract

The phenomenon of electromagnetic scattering it's produce when a wave of light interact with the matter, the atoms that compose it absorb energy, and then send it in different direccions with different intensity.

Our goal here is to study from the electromagnetic point of view, the characteristic and property of this phenomenon, that is why, we begin by reviewing the bases of the electromagnetism i.e. the Maxwell equations, the Poynting theorem, the plane wave, the spherical wave etc.

Once the theorical bases have been introduced, we'll see how we can describe the scattered field by some mathematical tool such as, the Green operator , the dyadic transition operator then we will see the characteristic of a scattered far field zone and we'll finish by studying the T-matriz methop and the Lorenzt-Mie's theory although, this is a particulation of the T-matriz methop. This last part we will only make a description of its main ideas.

# 1 Introducción

Nota:

Como consecuencia de la actual pandemia, se han tenido que cambiar la parte práctica del proyecto, es decir, se han eliminado las secciones de los resultados y la metodología, y se ha sustituido por un trabajo íntegramente teórico, sin obtener resultados experimentales, ni realizar simulaciones. Debido a esto, el proyecto se ha basado principalmente, en la descripción de la teoría electromagnética de fenómeno de *scattering*, por medios bibliográficos [1, 2] y en menor medida de artículos científicos [3, 6, 4, 5]. Todas las afirmaciones y justificaciones teóricas en el trabajo se han ido tomando únicamente de [1, 2].

El *scattering* electromagnético por partículas o grupo de partículas es un fenómeno que parece estar presente en amplias ramas de la ciencia y la ingeniería. La luz que atraviesa la atmósfera terrestre, es dispersado por las moléculas y partículas suspendidas en el aire formando el cielo azul que observamos, o en las nubes blancas que observamos o en diversos fenómenos ópticos como los arcoíris, auroras etc. También podemos inducir el proceso en un laboratorio para estudiar las propiedades de la partículas, midiendo el campo dispersado, aunque para ello es necesario conocer el fenómeno y poder predecir como va ser el objeto en función del campo dispersado obtenido.

Hay una gran variedad de parámetros que intervienen en el proceso tales como, el tamaño, la forma, el índice de refracción, la morfología o geometría de la partícula como se observa en la siguiente imagen :

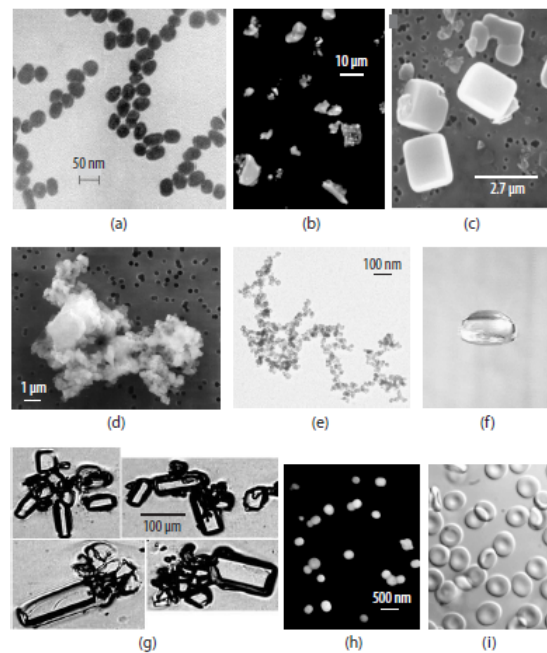


Figura 1: Ejemplos de partículas pequeñas. Tomado de [1]

Este hecho puede complicar la obtención de un modelo cuantitativo, la tarea por lo general es compleja incluso para partículas aisladas como se observa en la imagen 1.1 (a). La dificultad será un tanto mayor, ya si queremos modelar el proceso a través de un

grupos de partículas escasamente distribuidas (partículas en la imagen 1.1b y 1.1C) sin embargo, el problema de mayor complejidad será modelar el campo dispersado a partir de medios densos como en se ve en la figura 1.1d.

El principal objetivo de este trabajo es presentar coherentemente la teoría del fenómeno de *scattering* electromagnético, por partículas individuales o por un grupo de partículas, dentro del marco de las ecuaciones de Maxwell, que se asume como un axioma.

Por lo general, a lo largo del trabajo se asume las siguientes hipótesis para facilitar los cálculos o simplemente por conveniencia, a menos que se especifique lo contrario :

1. Se considera siempre que los procesos de dispersión son producidos por un conjunto finito de partículas con una distribución espacial dada. Sin necesidad de considerar la estructura atómica de las partículas dispersoras.
2. El medio será homogéneo, isótropo, no absorbente y lineal.
3. Los procesos de dispersión serán siempre elásticos, de tal forma que se excluye los procesos ópticos no lineales, los procesos inelásticos tales como la dispersión de Raman o Brillouin. También se excluye los procesos de emisión de fotones debido a las transiciones electrónicas (radiación del cuerpo negro).
4. Para tiempos mucho mayores que el periodo de una onda  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$ , la dependencia temporal de las ondas electromagnéticas serán armónicas y representadas por la notación compleja, es decir  $t \gg T_0 \rightarrow \bar{E}(r, t) = \exp(-i\omega t)\bar{E}(r)$ ;  $\bar{H}(r, t) = \exp(-i\omega t)\bar{H}(r)$ . Las amplitudes  $\bar{E}(\bar{r})$  y  $\bar{H}(\bar{r})$  pueden fluctuar alrededor de sus valores medios, pero su variación será mucho menor que debido al factor  $\exp(-i\omega t)$ , además corresponderán a una radiación perfectamente monocromática.
5. La morfología, posición, orientación de las partículas dispersoras, si varían, lo harán con un intervalo temporal  $T_v$  mucho mayor que  $T_0$ . Consideraremos pues periodos de tiempos largos en comparación con  $T_0$ , pero pequeños comparados con  $T_v$ , de esta forma el objeto será compacto.

Con las supuestos realizados anteriormente podemos expresar el efecto de *scattering* en términos de  $\bar{E}(\bar{r})$  y  $\bar{H}(\bar{r})$  (independientes del tiempo) de la siguiente forma :

- En ausencia de un objeto dispersor

$$\nabla \times \bar{E}(\bar{r}) = i\omega\mu_0\bar{H}(\bar{r}) \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \bar{H}(\bar{r}) = -i\omega\epsilon_1\bar{E}(\bar{r}) \quad (1.2)$$

$$r \in R^3$$

- Si se pone un objeto dispersor las expresiones son similares solo que ahora consideramos el volumen interior de la partícula de *scattering* :

Válido para el interior de la partícula es decir,  $r \in V_{int}$

$$\nabla \times \bar{E}(\bar{r}) = i\omega\mu_0\bar{H}(\bar{r}) \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \bar{H}(\vec{r}) = -i\omega\epsilon_2(r,\omega)\bar{H}(\vec{r}) \quad (1.4)$$

Válido para el exterior de la partícula es decir,  $r \in V_{ext}$

$$\nabla \times \bar{E}(\vec{r}) = i\omega\mu_0\bar{H}(\vec{r}) \quad (1.5)$$

$$\nabla \times \bar{H}(\vec{r}) = -i\omega\epsilon_1\bar{H}(\vec{r}) \quad (1.6)$$

con  $V_{int} \cup V_{Ext} = R^3$

Si se considera  $\bar{E}_1(\vec{r})$  y  $\bar{H}_1(\vec{r})$  la solución para el caso sin *scattering* y  $\bar{E}_2(\vec{r})$ ,  $\bar{H}_2(\vec{r})$  para el caso con *scattering*. Se puede describir  $\bar{E}_2(\vec{r})$ ,  $\bar{H}_2(\vec{r})$  en función de los campos incidentes, sin *scattering* alguno de la siguiente forma  $\bar{E}_2(\vec{r}) = \bar{E}_1(\vec{r}) + \bar{E}_3(\vec{r})$  (igualmente para H) en este caso  $\bar{E}_3(\vec{r})$  se suele llamar “campo de *scattering*” y se suele representar como  $\bar{E}_{scatt}(\vec{r})$  y el campo incidente como  $\bar{E}_{inc}(\vec{r})$ . Tenemos pues que :

$$\bar{E}(\vec{r}) = \bar{E}_2(r) = \bar{E}_{inc}(\vec{r}) + \bar{E}_{scatt}(\vec{r}) \quad (1.7)$$

$$\bar{H}(\vec{r}) = \bar{H}_2(\vec{r}) = \bar{H}_{inc}(\vec{r}) + \bar{H}_{scatt}(\vec{r}). \quad (1.8)$$

En la siguiente imagen se puede observar los diferentes tipos de campos que intervienen:

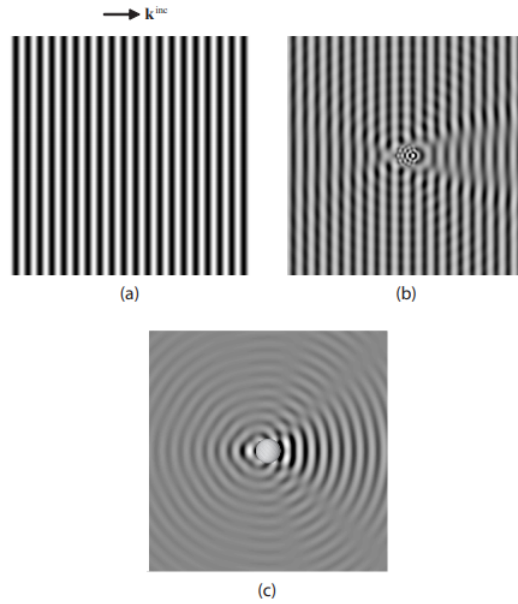


Figura 2: El caso a) corresponde a  $\bar{E}_{inc}(\vec{r})$ , b) a  $\bar{E}(\vec{r}) = \bar{E}_2(\vec{r})$  y c) a  $\bar{E}_{scatt}(\vec{r})$ . Tomado de [1]

De esta forma se define el campo de *scattering* como la diferencia entre el campo con el objeto dispersor menos el campo incidente.

## 2 Fundamentos teóricos

### 2.1 Las ecuaciones macroscópicas de Maxwell.

Como consideramos las leyes básicas del electromagnetismo como un axioma, que describen el comportamiento de la distribución espacial y temporal de los campos y su interacción con la materia.

En unidades del sistema internacional estas ecuaciones se describen como:

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho(\bar{r}, t) \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J}(\bar{r}, t) + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad (2.4)$$

Donde  $\bar{E}$ ,  $\bar{B}$  corresponde a los campos eléctricos e inducción magnética respectivamente,  $\bar{D}$ ,  $\bar{H}$  y  $\bar{J}$  corresponde al desplazamiento eléctrico, al campo magnético y a la densidad de corriente respectivamente.  $\bar{D}$  y  $\bar{H}$  se definen como sigue:

$$\bar{D}(\bar{r}, t) = \epsilon_0 \bar{E}(\bar{r}, t) + \bar{P}(\bar{r}, t) \quad (2.5)$$

$$\bar{H}(\bar{r}, t) = \frac{\bar{B}(\bar{r}, t)}{\mu_0} - \bar{M}(\bar{r}, t) \quad (2.6)$$

Donde  $\bar{P}(\bar{r}, t)$  y  $\bar{M}(\bar{r}, t)$  hacen referencia al vector polarización magnética y magnetización respectivamente que representan la media del momento dipolar eléctrico y magnético.

De las ecuaciones 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4 podemos deducir la ecuación de continuidad tomando derivando con respecto al tiempo, la ecuación 9 y tomando divergencia en la ecuación 12. Tenemos pues  $\nabla \cdot (\nabla \times \bar{H}) = \nabla \cdot (\bar{J}(\bar{r}, t) + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}) = \nabla \cdot \bar{J}(\bar{r}, t) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  (la divergencia de cualquier campo puramente rotacional es nulo)  $\rightarrow \nabla \cdot \bar{J}(\bar{r}, t) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ .

Las ecuaciones anteriores no determinan unívocamente el campo electromagnético, por ello se suele introducir las siguientes relaciones constitutivas:

$$\bar{P}(\bar{r}, t) = \epsilon_0 \chi_e \bar{E}(\bar{r}, t) \quad (2.7)$$

$$\bar{B}(\bar{r}, t) = \mu_0 (\bar{H}(\bar{r}, t) + \bar{M}(\bar{r}, t)) \quad (2.8)$$

$$\bar{J}(\bar{r}, t) = \sigma(\bar{r}) \bar{E}(\bar{r}, t) \quad (2.9)$$

Consideraremos en general medios lineal e isótropos de tal forma que  $\mu, \sigma, \epsilon$  sean escalares e independientes del campo aplicado. De tal forma que la permitividad eléctrica y magnética se pueden expresar en función de la susceptibilidad eléctrica  $\chi_e$  y magnética  $\chi_m$  como :

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e) = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (2.10)$$

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) = \mu_0 \mu_r \quad (2.11)$$

Donde  $\epsilon_r$  y  $\mu_r$  son las permisividades relativas eléctricas y magnéticas. Nos queda, pues una relación lineal entre  $D$ ,  $B$  y  $E$ ,  $H$  de la siguiente forma :

$$\overline{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \overline{E}(\vec{r}, t) = \epsilon \overline{E}(\vec{r}, t) \quad (2.12)$$

$$\overline{B} = \mu_0 \mu_r \overline{H}(\vec{r}, t) = \mu \overline{H}(\vec{r}, t) \quad (2.13)$$

## 2.2 Condiciones de contorno

Las ecuaciones de Maxwell, anteriores son válidas para aquellos medios cuyos parámetros constitutivos  $\mu$ ,  $\sigma$ ,  $\epsilon$  varían de forma continua. No es así, si tenemos por ejemplo, una superficie que separa dos medios distintos. En tal caso puede existir discontinuidades en el campo electromagnético. Podemos deducir las ecuaciones de discontinuidad de un medio a otro, a través de las ecuaciones de Maxwell, sin embargo aquí lo tomaremos como un axioma.

Consideramos dos medios distintos separados por una superficie como se observa en la siguiente imagen :

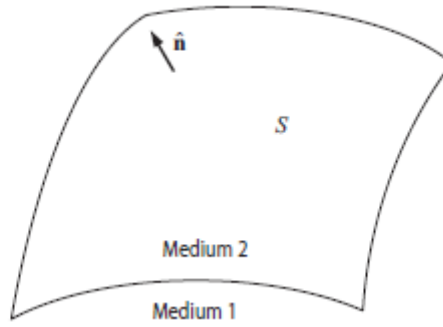


Figura 3: Una interfase  $S$ , que separa dos medios diferentes con diferentes relaciones constitutivas .Tomado de [1]

Donde  $\hat{n}$ , corresponde al vector unitario normal a la superficie  $S$ . Tenemos las siguientes condiciones de contorno

$$(\overline{B}_2 - \overline{B}_1) \cdot \hat{n} = 0 \quad (2.14)$$

$$(\overline{D}_2 - \overline{D}_1) \cdot \hat{n} = \rho_s \quad (2.15)$$

$$\hat{n} \times (\overline{E}_2 - \overline{E}_1) = 0 \quad (2.16)$$

$$\hat{n} \times (\overline{H}_2 - \overline{H}_1) = \vec{J}_s \quad (2.17)$$

La primera condición se nos indica que la componente normal del campo de inducción magnética es continua al pasar de una superficie a otra. La segunda condición nos indica que la componente del vector desplazamiento eléctrico es discontinua , si hay cargas eléctricas en la superficie de separación . Las siguientes condiciones implican lo mismo



salvo que ahora consideramos la componente tangencial de  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  (se tiene un producto vectorial). Los campos eléctricos son continuos y el campo magnético  $\vec{H}$  es discontinuo, salvo que no haya corrientes superficiales.

## 2.3 Soluciones de las ecuaciones de Maxwell en medios homogéneos

Veremos a continuación, dos tipos de soluciones fundamentales de las ecuaciones de Maxwell, la primera de ellas, la onda plana, cuya solución temporal se basa en un haz paralelo plano perfectamente monocromático (una sola frecuencia) . La segunda de ellas, la onda esférica que se trata de una solución asintótica cuya solución de la parte temporal es una esfera.

### 2.3.1 Onda plana armónica

Vienen expresadas por las siguientes ecuaciones :

2.18

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp(i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)) \quad (2.18)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 \exp(i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)) \quad (2.19)$$

Donde  $E_0$ ,  $H_0$  y  $\vec{k}$  son constantes complejas y definen la amplitud eléctrica y magnética y el número de onda. El vector de onda se suele expresar como  $\vec{k} = \vec{k}_r + i\vec{k}_i$  si lo introducimos en la expresión anterior obtenemos que

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp(-\vec{k}_i \vec{r}) \exp(i(\vec{k}_r \vec{r} - \omega t)) \quad (2.20)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 \exp(-\vec{k}_i \vec{r}) \exp(i(\vec{k}_r \vec{r} - \omega t)) \quad (2.21)$$

Luego podemos observar que si  $\vec{k}$  tiene una componente imaginaria la amplitud de la onda decae exponencialmente, en este caso el medio es absorbente. Un plano normal a un vector verifica que, por tanto los puntos con la misma amplitud y fase son planos normales a  $\vec{k}_i$  y a  $\vec{k}_r$  respectivamente y por otro lado si  $\vec{k}_i \parallel \vec{k}_r$  entonces ambos planos son coincidentes, en ese caso se denomina onda homogénea y en caso contrario onda inhomogénea. Podemos determinar la velocidad de fase con  $v = \frac{\omega}{|\vec{k}_r|}$ , que

La intensidad de la onda que se determina con el valor medio del vector Poynting, como  $I(r) = |\vec{S}(r, t)| = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*)$ , se obtiene que

$$I = I_0 \exp(-\alpha \hat{n} \cdot \vec{r})$$

$\alpha$  es el coeficiente de absorción del medio y se obtiene como  $\alpha = \frac{4\pi n}{\lambda_0}$ , donde  $n$ , es el índice de refracción del medio y  $\lambda_0$  es la longitud de onda en el vacío.

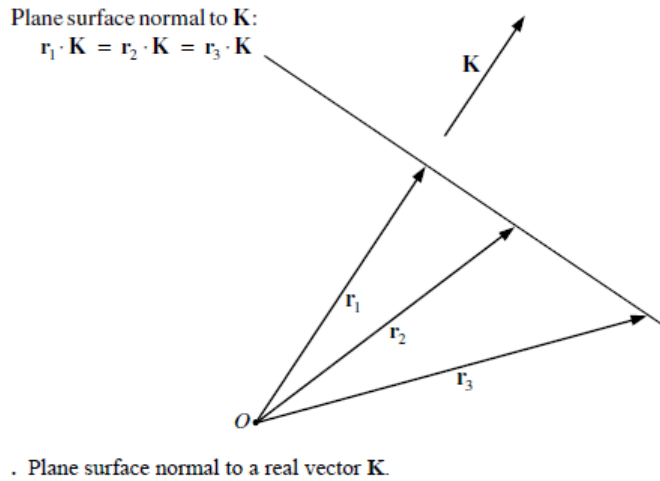


Figura 4: Superficie plana de fase constante, el vector  $\bar{k}$  es normal a la superficie. Tomado de [2]

### 2.3.2 Onda esférica armónica

La solución es similar a la anterior y sus características son equivalentes solo que en este caso tenemos una superficie esférica como fase constante. Las ecuaciones que describen los campos son las siguientes

$$\bar{E}(\bar{r}, t) = \frac{\bar{E}_1(\hat{r}, t)}{r} \exp(i(\bar{k}\bar{r} - \omega t)) \quad (2.22)$$

$$\bar{H}(\bar{r}, t) = \frac{\bar{H}_1(\hat{r}, t)}{r} \exp(i(\bar{k}\bar{r} - \omega t)) \quad (2.23)$$

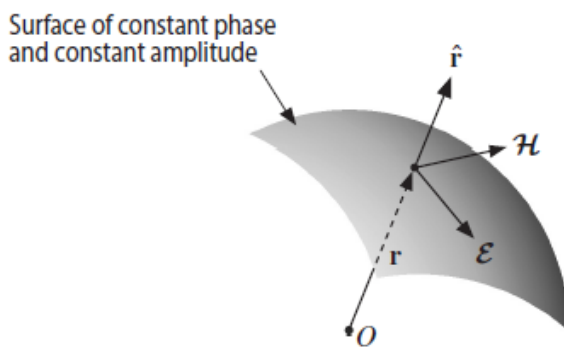


Figura 5: Superficie esférica de fase constante. Tomada de [2]

## 2.4 El teorema de Poynting

Este teorema nos indica el balance energético en un volumen cerrado, para deducirlo calcularemos las energías asociadas a los campos magnéticos y eléctricos en un volumen, y aplicaremos la conservación de la energía, junto con algunas propiedades de los campos.

Considerando que el campo magnético no ejerce trabajo sobre las cargas , ya que por la ley de Lorentz, la trayectoria  $d\vec{l}_m$  y la fuerza  $d\vec{F}_{mag}$  son ortogonales:

$$d\vec{F}_{mag} = \vec{v}(r, t) \times \vec{B}(r, t) dq \rightarrow dW_{mag} = 0 \quad (2.24)$$

Por lo que  $dW_T = dW_{ele} + dW_{mag} = dW_{ele}$ . Determinamos pues, únicamente la energía del campo eléctrico,  $W_{ele} = \int \vec{F}_{ele} \cdot d\vec{l} = \int q\vec{E} \cdot d\vec{l}$ . Podemos obtener la tasa energética por unidad de tiempo y volumen derivando primero respecto a  $V$  , y a continuación respecto a  $t$  con lo que

$$\frac{d}{dt} \frac{dW_{elec}}{dV} = \frac{d}{dt} \int \rho \vec{E} \cdot d\vec{l} = \rho \vec{E} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} = \rho \vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{E} \cdot \vec{J}. \quad (2.25)$$

Aplicando ahora las ecuaciones de Maxwell 2.2 y 2.4 considerando además la propiedad vectorial  $\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot \nabla \times \vec{b}$ . Obtenemos el llamado teorema de Poynting :

$$-\vec{E} \cdot \vec{J} = \frac{\nabla \cdot}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} + \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} \right) \quad (2.26)$$

Ahora bien definiendo el vector poynting como  $\vec{S}(r, t) = \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{E} \times \vec{H}$  y la densidad de energía electromagnética como  $U = \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} + \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2}$  nos queda :

$$-\vec{E} \cdot \vec{J} = \nabla \cdot \vec{S} + \frac{\partial U}{\partial t} \quad (2.27)$$

Si integramos sobre un volumen arbitrario cerrado  $V$  y aplicamos el teorema de Gauss llegamos a que :

$$\int_V \vec{J}(r, t) \cdot \vec{E}(r, t) dV = - \oint_S \vec{S} \cdot \hat{n} ds - \int_V \frac{\partial U}{\partial t} dV \quad (2.28)$$

Como  $\vec{J}(r, t) \cdot \vec{E}(r, t)$  tiene unidades de potencia energética se puede concluir, que el vector Poynting integrado a lo largo de una superficie  $S$  nos indica la energía pérdida o ganada por unidad de tiempo, es decir nos indica el flujo energético a lo largo de la superficie.

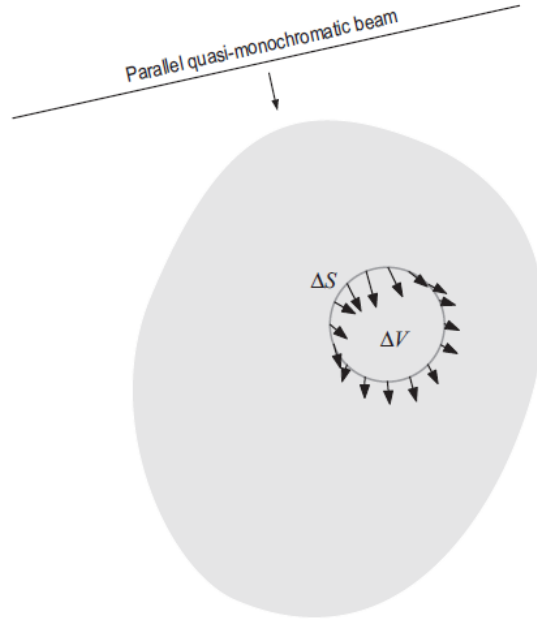


Figura 6: Una onda plana incidente sobre un volumen  $\Delta V$ . Las flechas indican la dirección del vector  $\langle \vec{S}(\vec{r}, t) \rangle$ . Tomada de [1]

Sí medimos con un aparato el flujo energético, obtenemos un promedio temporal del vector Poynting, ya que el periodo de la onda, es por lo general muy pequeña en comparación con el tiempo de medida del instrumento. Se puede obtener este promedio como  $\langle \vec{S}(\vec{r}, t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(\vec{r}, t) dt$ . No obstante, obtendremos este mismo valor calculado el vector de Poynting complejo definido como  $\vec{S}(\vec{r}) = \frac{1}{2}(\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r}))$ , el valor medio vendrá dado por la parte real del vector de Poynting complejo como :

$$\langle \vec{S}(\vec{r}, t) \rangle = \text{Re} \vec{S}(\vec{r}) \quad (2.29)$$

Una vez calculado el valor medio del vector, podemos determinar la potencia de energía neta  $W$  que atraviesa una superficie cerrada  $S$ , por ello basta con aplicar la expresión :

$$W = \int_S \langle \vec{S}(\vec{r}, t) \rangle \cdot d\vec{S} = \int_S \langle \vec{S}(\vec{r}, t) \rangle \cdot \hat{n}(\vec{r}) dS \quad (2.30)$$

Donde  $\hat{n}(\vec{r})$  es el versor ortogonal a la superficie que apunta hacia fuera. Este valor es positivo si hay una potencia de energía neta entrante en el volumen encerrado por  $S$  y negativo en caso contrario.

## 2.5 Los parámetros de Stokes en una onda plana

Hemos visto anteriormente que una importante característica vectorial de las ondas electromagnéticas es el vector de Poynting, que mide el flujo de energía a través de una superficie. Sin embargo el vector de Poynting no es el único parámetro vectorial que tiene las unidades de flujo energético, lo que nos indica que no nos proporciona toda la información posible, a través de un instrumento óptico. Por ejemplo, si tenemos dos ondas electromagnéticas diferentes  $\vec{E}'$  y  $\vec{E}''$  tal que  $|\vec{E}'| = |\vec{E}''|$  entonces el vector de Poynting

es el mismo, no diferenciaremos entre ellas en la medida de la energía. Mientras que si podemos diferenciar por ejemplo, en el término cuadrático  $\bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{E}}^*$ .

Por este motivo veremos a continuación que podemos caracterizar por completo una onda electromagnética transversal, a través de cuatro valores reales que tiene una dimensión de flujo energético, denominados los parámetros de Stokes. Estudiaremos dichos valores para el caso de una onda plana o esférica.

Como bien sabemos en una onda plana o esférica la dirección de propagación, las oscilaciones de campo eléctrico y magnético forman un triedro, es decir, son ortogonales entre sí. Empleando coordenadas esféricas y especificando la dirección de propagación con el versor  $\hat{n} = \hat{r}$ , o por el par  $[\theta, \phi]$  con  $\theta \in [0, \pi]$  y  $\phi \in [0, 2\pi]$ . Los campos eléctrico y magnético se sitúan en los planos formados por los versores  $\hat{\theta}$  y  $\hat{\phi}$  de tal forma, que podemos descomponer el campo eléctrico como  $\bar{\mathbf{e}} = \bar{\mathbf{e}}_\theta + \bar{\mathbf{e}}_\phi$  (igualmente con el campo magnético) donde los subíndices reflejan la componente del campo en  $\hat{\theta}$  y  $\hat{\phi}$  respectivamente. Ya hemos visto anteriormente la expresión para una onda plana 2.18 considerando  $\bar{\mathbf{k}} = |k|\hat{\mathbf{k}} = |k|\hat{n}$ . Tenemos pues que  $\bar{\mathbf{e}}(r, t) = E_0 \exp(ik\hat{n} \cdot \bar{\mathbf{r}} - i\omega t)$  y descomponiendo en la dirección  $\hat{\theta}$  y  $\hat{\phi}$  nos queda que  $\bar{\mathbf{e}}(r, t) = \bar{\mathbf{e}}_\theta(r, t) + \bar{\mathbf{e}}_\phi(r, t)$ . Podemos construir a partir de los términos anteriores un conjunto linealmente independiente combinando términos cuadráticos obteniendo así los cuatro términos que siguen:

$$\left( \begin{array}{ll} \bar{E}_\phi(r, t)[\bar{E}_\phi(r, t)]^* = E_{0\phi}E_{0\phi}^* & \bar{E}_\theta(r, t)[\bar{E}_\theta(r, t)]^* = E_{0\theta}E_{0\theta}^* \\ \bar{E}_\theta(r, t)[\bar{E}_\phi(r, t)]^* = E_{0\theta}E_{0\phi}^* & \bar{E}_\phi(r, t)[\bar{E}_\theta(r, t)]^* = E_{0\phi}E_{0\theta}^* \end{array} \right) \quad (2.31)$$

El vector de Stokes se define como :

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix} \\ \mathbf{I} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \begin{bmatrix} \bar{E}_\phi(r, t)[\bar{E}_\phi(r, t)]^* + \bar{E}_\theta(r, t)[\bar{E}_\theta(r, t)]^* \\ \bar{E}_\theta(r, t)[\bar{E}_\theta(r, t)]^* - \bar{E}_\phi(r, t)[\bar{E}_\phi(r, t)]^* \\ \bar{E}_\theta(r, t)[\bar{E}_\phi(r, t)]^* - \bar{E}_\phi(r, t)[\bar{E}_\theta(r, t)]^* \\ i(\bar{E}_\phi(r, t)[\bar{E}_\theta(r, t)]^* - \bar{E}_\theta(r, t)[\bar{E}_\phi(r, t)]^*) \end{bmatrix} \\ \mathbf{I} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \begin{bmatrix} E_{0\phi}E_{0\phi}^* + E_{0\theta}E_{0\theta}^* \\ E_{0\theta}E_{0\theta}^* - E_{0\phi}E_{0\phi}^* \\ -E_{0\theta}E_{0\phi}^* - E_{0\phi}E_{0\theta}^* \\ i(E_{0\phi}E_{0\theta}^* - E_{0\theta}E_{0\phi}^*) \end{bmatrix} \\ \mathbf{I} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \begin{bmatrix} E_{0\phi}E_{0\phi}^* + E_{0\theta}E_{0\theta}^* \\ E_{0\theta}E_{0\theta}^* - E_{0\phi}E_{0\phi}^* \\ -2\text{Re}(E_{0\theta}E_{0\phi}^*) \\ 2\text{Im}(E_{0\theta}E_{0\phi}^*) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Podemos observar que tienen dimensiones de flujo energético. Además dado que  $zz^* = |z|^2$  tenemos que  $I \geq 0$ . Los parámetros de Stokes forman un conjunto de valores que nos permiten caracterizar por completo a la onda electromagnética en la medida

en que este sujeto a análisis óptico. De aquí deducimos por un lado que, es imposible distinguir dos ondas con los mismos parámetros de Stokes y por otro lado que cualquier otra cantidad observable es una combinación lineal de los anteriores parámetros de Stokes.

Efectivamente si tenemos el campo descompuesto en las direcciones  $\hat{\theta}$  y  $\hat{\phi}$ , podemos caracterizarlo por dos números complejos  $E_{0\theta} = a_{\theta} \exp(i\Delta_{\theta})$  y  $E_{0\phi} = a_{\phi} \exp(i\Delta_{\phi})$  o equivalentemente por 4 números reales, las amplitudes  $a_{\theta}$  y  $a_{\phi}$  y las fases  $\Delta_{\theta}$  y  $\Delta_{\phi}$ . Los parámetros de Stokes nos traen información acerca de las amplitudes  $a_{\theta}$ ,  $a_{\phi}$  y las diferencias de fase en las direcciones  $\hat{\theta}$  y  $\hat{\phi}$  definido como  $\Delta = \Delta_{\theta} - \Delta_{\phi}$ . Aunque no nos traen información acerca de las fases  $\Delta_{\theta}$  o  $\Delta_{\phi}$  únicamente sobre su diferencia ya que se anulan cuando realizamos el producto por el complejo conjugado.

Teniendo en cuenta lo anterior podemos seguir operando sobre el vector de Poynting obteniendo:

$$I = \begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \begin{bmatrix} (a_{\theta}^2 + a_{\phi}^2) \\ (a_{\theta}^2 - a_{\phi}^2) \\ -2a_{\theta}a_{\phi}\cos\Delta \\ 2a_{\theta}a_{\phi}\sin\Delta \end{bmatrix}$$

Obtendremos los campos eléctricos verdaderos tomando la parte real, tenemos pues  $\epsilon_{\theta}(r, t) = \text{Re}E_{0\theta} = \text{Re}a_{\theta}\exp(i\Delta_{\theta}) = a_{\theta}\cos(k\hat{n}\cdot\vec{r} - \omega t) = a_{\theta}\cos(\delta_{\theta} - \omega t)$  donde  $\delta_{\theta} = \Delta_{\theta} + k\hat{n}\cdot\vec{r}$  equivalentemente para la componente  $\epsilon_{\phi}(r, t)$ . Los parámetros de Stokes escritos así, nos proporcionan información acerca del estado de polarización de la onda, según los valores de  $Q$ ,  $U$  y  $V$  podremos obtener un estado polarizado lineal, elíptica, natural o circular. Aunque no discutiremos los diferentes casos, pues no entran en el objetivo del trabajo.

### 2.5.1 La matriz coherencia en una onda plana

La matriz o vector coherencia se define como una alternativa a los parámetros de Stokes, pues este no es la única combinación de cuatro parámetros nos proporcionan información acerca del flujo, intensidad, estado de polarización, etc. Partiendo de la expresión anterior 2.31. Basta con realizar el producto por  $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$  de la anterior matriz para obtener la matriz

$$\text{coherencia } \tilde{\rho} = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \begin{pmatrix} E_{0\phi}E_{0\phi}^* & E_{0\theta}E_{0\theta}^* \\ E_{0\theta}E_{0\phi}^* & E_{0\phi}E_{0\theta}^* \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Se suele introducir los anteriores términos en un vector denominado vector coherencia :

$$J = \begin{bmatrix} \rho_{11} \\ \rho_{12} \\ \rho_{21} \\ \rho_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{0\phi}E_{0\phi}^* \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{0\theta}E_{0\theta}^* \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{0\theta}E_{0\phi}^* \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{0\phi}E_{0\theta}^* \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

El vector coherencia se relaciona con los parámetros de Stokes a través de la matriz  $D$ ,

por medio de la relación  $I = DJ$ . Donde

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -i & i & 0 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

La relación inversa es  $J = D^{-1}I$ . La matriz inversa queda

$$D^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & i \\ 0 & 0 & -1 & -i \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Hay sin embargo otras dos representaciones que también se suelen usar aparte del vector coherencia y los parámetros de Stokes. Estas son los parámetros de Stokes modificados y el vector complejo circular- polarización.:

$$I^{MS} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(I + Q) \\ \frac{1}{2}(I - Q) \\ U \\ V \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$I^{cp} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Q + iU \\ I + V \\ I - V \\ Q - iU \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

## 2.6 El tensor de Poynting-Stokes

Los parámetros de Stokes, pese a que describe muy bien el estado de polarización de una onda, tiene algunas limitaciones. No contiene información alguna sobre la dirección del vector Poynting, y solo es válido para las ondas transversales, como las ondas esféricas (descritas en el apartado anterior) o planas. Sin embargo las ondas electromagnéticas en las cercanías cualquier objeto no son transversales, por lo que no podríamos describir por ejemplo el efecto de *scattering* en el entorno del objeto dispersor. Por este motivo se introduce el tensor de Poynting-Stokes, ya que puede ser empleado para cualquier campo electromagnético, posee al igual que los parámetros de Stokes las dimensiones de flujo energético, y permite describir mejor los efectos de dispersión como veremos más adelante. Dicho valor se define como

$$\tilde{P}(\vec{r}, t) = \overline{E}_n(\vec{r}, t) \otimes \overline{H}_n(\vec{r}, t) \quad (2.39)$$

Aquí el símbolo  $\otimes$  denota el producto diádico o tensorial que se ha detallado en el apéndice 4.1. Podemos, por analogía al vector de Poynting definir, un tensor de Poynting complejo que verifique

$$\langle \tilde{P}(\vec{r}, t) \rangle = \text{Re}[\tilde{P}(\vec{r})]^T$$

Donde el símbolo  $^T$  indica la transposición de la matriz/operador . Para el caso de una onda monocromática el tensor es

$$\tilde{P}(\bar{r}) = \frac{1}{2} \bar{H}(\bar{r}) \otimes \bar{E}^*(\bar{r}) \quad (2.40)$$

Usaremos más adelante estas relaciones y veremos como afecta el efecto de scattering sobre el tensor de Poynting.

## 2.7 Campos electromagnéticos policromáticos

Habíamos definido previamente, una onda puramente monocromática como aquella cuya dependencia temporal  $\bar{E}(\bar{r}, t)$  venia descrito por el término  $\exp(-i\omega t)$ , es decir descrito por una única frecuencia. Este modelo puede modelar muy bien, por ejemplo los rayos láseres, sin embargo no es un buen modelo para la inmensa mayoría de la luz natural o artificial, que suelen emitir en diferentes rangos de frecuencias o espectros . Por lo general, los campos electromagnéticos suelen ser policromáticos con un espectro comprendido desde un rango  $[\omega_{min}, \omega_{máx}]$ . Estos se pueden representar aplicando el principio de superposición, es decir una onda policromática no es mas que la suma de un conjunto  $N$  de ondas monocromáticas.

$$\bar{E}(\bar{r}, t) = \text{Re} \sum_{n=1}^N \bar{E}_n(\bar{r}) \exp(-i\omega_n t) \quad (2.41)$$

$$\bar{H}(\bar{r}, t) = \text{Re} \sum_{n=1}^N \bar{H}_n(\bar{r}) \exp(-i\omega_n t) \quad (2.42)$$

Aquí, cada par  $[\bar{E}_n(\bar{r}), \bar{H}_n(\bar{r})]$  representa una onda monocromática con  $\omega_n \in [\omega_{min}, \omega_{máx}]$ . Aplicando la definición del tensor de Poynting-Stokes tenemos que :

$$\begin{aligned} \tilde{P}(\bar{r}, t) &= \bar{E}(\bar{r}, t) \otimes \bar{H}(\bar{r}, t) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \sum_{n'=1}^N [\bar{E}_n(\bar{r}) \exp(-i\omega_n t) + \bar{E}_n^*(\bar{r}) \exp(i\omega_n t)] \otimes \\ &\quad [\bar{H}_{n'}(\bar{r}) \exp(-i\omega_{n'} t) + \bar{H}_{n'}^*(\bar{r}) \exp(i\omega_{n'} t)] \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \sum_{n=1}^N \sum_{n'=1}^N [\bar{E}_n(\bar{r}) \otimes \bar{H}_{n'}^*(\bar{r}) \exp(-it(\omega_n + \omega_{n'}))] + \\ &\quad \frac{1}{2} \text{Re} \sum_{n=1}^N \sum_{n'=1}^N [\bar{E}_n^*(\bar{r}) \otimes \bar{H}_{n'}(\bar{r}) \exp(it(\omega_n - \omega_{n'}))] \end{aligned}$$

Sí promediamos sobre periodos de tiempos más muchos más largos que  $T \gg \frac{2\pi}{|\omega_n - \omega_{n'}|}$ , podremos observar que, el primer término de la ecuación anterior se hace nulo, el segundo término también se anula para aquellos en los que el sumando verifique que  $n \neq n'$  . Con lo que el tensor de Poynting se queda como  $\langle \tilde{P}(\bar{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \bar{E}_n^*(\bar{r}) \otimes \bar{H}_n(\bar{r})$ , reescribiendo la ecuación anterior en términos del tensor de Poynting complejo de cada onda monocromática obtenemos que:

$$\langle \tilde{P}(\bar{r}, t) \rangle = \text{Re}[\tilde{P}(\bar{r})]^T \quad (2.43)$$



$$\tilde{P}(\vec{r}) = \sum_{n=1}^N \tilde{P}_n(\vec{r}) \quad (2.44)$$

$$\tilde{P}_n(\vec{r}) = \frac{1}{2} \bar{H}_n(\vec{r}) \otimes \bar{E}_n^*(\vec{r}) \quad (2.45)$$

Como consecuencia de las ecuaciones anteriores el vector de Poynting de la onda policromática se consigue de la misma forma, sumando cada onda monocromática componente o sea  $\tilde{S}(\vec{r}) = \sum_{n=1}^N \tilde{S}_n(\vec{r})$  con  $\tilde{S}_n = \frac{1}{2} \bar{E}(\vec{r}) \times \bar{H}^*(\vec{r})$ .

## 2.8 Estudio del efecto de *Scattering* por objetos finitos compactos

Consideremos un objeto dispersor en sumergido en un medio infinitamente homogéneo, isótropo, lineal y no absorbente. El objeto dispersor puede ser una única partícula o un conjunto N que pueden estar separados, de tal forma que el volumen que ocupa es

$$V_{int} = \cup_{i=1}^N V_i \quad (2.46)$$

Donde el subíndice  $i$  indica el volumen que ocupa la partícula  $i$ -enesíma. Podemos dividir el espacio total  $R^3$  de tal forma  $V_{int} \cup V_{ext} = R^3$ . La región interna puede estar compuesto de un material, inhomógeno, no-magnético isótropo y lineal. Como tenemos una dependencia armónica temporal:  $\bar{E}(r, t) = \exp(-i\omega t) \bar{E}(r)$ ,  $\bar{H}(r, t) = \exp(-i\omega t) \bar{H}(r)$ , las ecuaciones de Maxwell 2.1 y 2.3, ya no son independientes sino que se pueden obtener de las otras dos restantes 2.4 y 2.2. De forma que podemos reescribir las ecuaciones como

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \bar{E}(\vec{r}) = i\omega\mu_0 \bar{H}(\vec{r}) \\ \nabla \times \bar{H}(\vec{r}) = -i\omega\epsilon_{ext} \bar{E}(\vec{r}) \end{array} \right\} \vec{r} \in V_{int} \quad (2.47)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \bar{E}(\vec{r}) = i\omega\mu_0 \bar{H}(\vec{r}) \\ \nabla \times \bar{H}(\vec{r}) = -i\omega\epsilon_{int}(\vec{r}, \omega) \bar{E}(\vec{r}) \end{array} \right\} \vec{r} \in V_{ext} \quad (2.48)$$

Las condiciones de contorno 2.16 y 2.17 se leen para este caso como

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{n} \times [\bar{E}_{ext}(\vec{r}) - \bar{E}_{int}(\vec{r})] = 0 \\ \hat{n} \times [\bar{H}_{ext}(\vec{r}) - \bar{H}_{int}(\vec{r})] = 0 \end{array} \right\} \vec{r} \in S_{int} \quad (2.49)$$

Aquí  $S$  es la superficie de separación entre  $V_{int}$  y  $V_{ext}$  donde el subíndice  $int$  indica la cara interna de la superficie,  $\hat{n}$  un versor ortogonal a la superficie  $S$  que apunta hacia fuera de ella.

Podemos suponer que el campo total puede expresarse como  $\bar{E}(\vec{r}) = \bar{E}_{scatt} + \bar{E}_{inc}$ , es decir suponemos cierto las ecuaciones 1.7 y 1.8. Además como tenemos una onda plana :

$$\bar{E}(\vec{r}) = \bar{E}_{scatt} + \bar{E}_0 \exp(i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)) \quad (2.50)$$

$$\bar{H}(\vec{r}) = \bar{H}_{scatt} + \bar{H}_0 \exp(i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)) \quad (2.51)$$

En la teoría de *scattering* se suele postular además el siguiente límite  $\lim_{r \rightarrow \infty} (\sqrt{\mu_0} \vec{r} \times \bar{H}_{scatt}(\vec{r}) + r \sqrt{\epsilon_{ext}} \bar{E}_{scatt}(\vec{r})) = 0$  denominado condición de radiación de Silver- Mueller en el infinito. El conjunto de ecuaciones 2.4, 2.2 junto con las condiciones de contorno 2.16 y 2.17 y la condición de Silver-Mueller, constituyen el problema estándar de *scattering* para una onda plana. Asumiremos que dicho problema tiene una solución, siendo esta única.

### 2.8.1 Calculando el término de *scattering*

De las ecuaciones 2.47 y 2.48 se concluye que basta con saber el campo  $\bar{E}$  para determinar el campo  $\bar{H}$  o al revés, saber  $\bar{H}$  para determinar  $\bar{E}$ . Sustituyendo  $\bar{H}$  y considerando una dependencia armónica obtenemos que :

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E}(\bar{r}) - k_1^2 \bar{E}(\bar{r}) = 0 \quad \bar{r} \in V_{ext} \quad (2.52)$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E}(\bar{r}) - k_2^2(\bar{r}, w) \bar{E}(\bar{r}) = 0 \quad \bar{r} \in V_{int} \quad (2.53)$$

Aquí  $k_1$  y  $k_2$  se refieren al número de onda en el exterior y en el interior de la onda respectivamente. Podemos reescribir las ecuaciones anteriores como una única ecuación diferencial inhomogénea :

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E}(\bar{r}) - k_1^2 \bar{E}(\bar{r}) = \bar{J}(\bar{r}, t) \quad (2.54)$$

Con

$$\bar{J}(\bar{r}, t) = k_1^2 [\tilde{m}^2(\bar{r}, w) - 1] \bar{E}(\bar{r}) \quad (2.55)$$

$$\tilde{m}(\bar{r}, w) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } \bar{r} \in V_{ext} \\ m(\bar{r}) \equiv \frac{k_2(\bar{r}, w)}{k_1} = \frac{m_{int}}{m_{ext}} \text{ si } \bar{r} \in V_{int} \end{array} \right\}$$

$m$  representa el índice de refracción

Como se trata de una ecuación diferencial lineal inhomogénea, tiene como solución dos partes, por un lado la parte homogénea que se obtiene anulando el término independiente, es decir  $\nabla \times \nabla \times \bar{E}(\bar{r}) - k_1^2 \bar{E}(\bar{r}) = 0$  y por otro lado, la solución particular que se puede obtener imponiendo las condiciones de contorno, y la condición de radiación de Silver-Mueller (válido para campos lejanos) . Sí observamos la solución homogénea anterior, podemos ver que se trata del campo en ausencia del objeto de dispersión, o sea se trata del campo que habría si no hubiese *scattering* y cuya solución es la onda plana. Nos queda pues la a solución particular , que es el campo de *scattering*  $\bar{E}_{scatt}$ . Para determinar este campo usamos el operador de Green diádica  $\tilde{G}$ , definido en el apéndice 4.6. El resultado que se obtiene es el siguiente :

$$\bar{E}_{scatt}(\bar{r}) = \int_{V_{int}} \tilde{G}(\bar{r}, \bar{r}') \cdot \bar{J}(\bar{r}') dV' \quad (2.56)$$

Usaremos en general el superíndice  $'$  para referirnos a los volúmenes fuentes, que en este caso se corresponde a la región interna  $V_{int}$ . Podemos sustituir el término,  $\bar{J}(\bar{r}, t)$  en la ecuación anterior y  $\bar{E}_{scatt}(\bar{r})$  en la ecuación 2.50 obteniendo el campo total :

$$\bar{E}(\bar{r}) = \bar{E}_{scatt}(\bar{r}) + \bar{E}_{inc} = k_1^2 \int_{V_{int}} \tilde{G}(\bar{r}, \bar{r}') \cdot [m(\bar{r}')^2 - 1] \bar{E}(\bar{r}') dV' + \bar{E}_{inc} \quad (2.57)$$

La ecuación anterior juega un papel esencial en la teoría del *scattering* electromagnético es por ello, por lo que discutiremos algunos de sus implicaciones conceptuales más importantes:

1. Podemos observar en primer lugar que, en ausencia de un objeto dispersor el campo total es igual al campo incidente  $m(\bar{r}')^2 = 1$ . Por otro lado el campo incidente

no cambia en presencia del objeto dispersor, por lo que podemos concluir que las causas del efecto de dispersión, no es el campo incidente sino la presencia de un objeto con un índice de refracción distinto al medio que le rodea.

2. La existencia de la solución del problema estándar de *scattering* para una onda plana, nos indica que existe al menos una solución para la ecuación anterior, aunque no demostraremos que sea está única se asumirá que siempre la ecuación 2.57 tendrá una solución única.
3. Podemos ver por otro lado que las condiciones de contorno y las condición de radiación están integradas en la ecuación anterior. Es más podemos observar que si conocemos el campo total en la región interna podemos obtener el campo total en todo el espacio evaluando la integral en  $V_{int}$ .

### 2.8.2 El operador transición díadica

Podemos reescribir la ecuación 2.57 empleando la aproximación de Rayleigh-Debye. Esta se basa en aproximar el campo electromagnético total, en primera instancia, por el campo incidente dentro del volumen de integración, es decir  $\bar{E}(\bar{r}')$  por  $\bar{E}_{inc}(\bar{r})$ , el campo total obtenido  $\bar{E}(\bar{r})$  se puede volver a introducir en la ecuación 2.57. Iterando este proceso podemos obtener el término de dispersión en función de la onda incidente:

$$\bar{E}_{scatt}(\bar{r}) = \int_{V_{int}} \tilde{G}(\bar{r}, \bar{r}') dV' \cdot \int_{V_{int}} \tilde{T}(\bar{r}', \bar{r}'') \cdot \bar{E}_{inc}(\bar{r}'') dV'' \quad (2.58)$$

Donde  $\tilde{T}$  es el operador transición díadica que se puede obtener comparando la expresión anterior con la ecuación 2.57. El resultado es el siguiente:

$$\tilde{T} = k_1^2 [m(\bar{r}')^2 - 1] \delta(\bar{r} - \bar{r}') \tilde{I} + [m(\bar{r}')^2 - 1] \int_{V_{int}} \tilde{G}(\bar{r}, \bar{r}') \cdot \tilde{T}(\bar{r}', \bar{r}'') \quad (2.59)$$

Una propiedad importante de  $\tilde{T}$  es que es independiente del campo incidente y solo depende de las propiedades del objeto de *scattering*, es decir de su índice de refracción en el interior del volumen de integración.

### 2.8.3 *Scattering* monocromático por objetos compactos

Podemos aplicar el resultado anterior para el caso de una onda incidente plana, calculando asimismo el tensor de Poynting resultante. Usaremos los resultados obtenidos para determinar el efecto que produce en una onda policromática.

Ya habíamos determinado en las ecuaciones 2.18, 2.19 la expresión de las ondas planas. Sustituyendo estas en las ecuaciones anteriores:

$$\bar{E}_{scatt}(\bar{r}) = \int_{V_{int}} \tilde{G}(\bar{r}, \bar{r}') dV' \cdot \int_{V_{int}} \tilde{T}(\bar{r}', \bar{r}'', \omega) \exp(ik_1 \hat{n}_{inc} \cdot \bar{r}'') \cdot \bar{E}_0 \exp(-i\omega t) dV''$$

De esta forma podemos expresar el campo total como

$$\bar{E}(\bar{r}, t) = \tilde{T}_E(\bar{r}, \hat{n}, \omega) \cdot \bar{E}_0 \exp(-i\omega t) \quad (2.60)$$

Aquí  $\tilde{T}(\bar{r}, \hat{n}, \omega)$  es la transformación díadica independiente  $\bar{E}_0$  cuyo resultado es :

$$\tilde{T}_e(\bar{r}, \hat{n}, \omega) = \exp(ik_1 \hat{n}_{inc} \cdot \bar{r}) \tilde{I} + \int_{V_{int}} \tilde{G}(\bar{r}, \bar{r}', k_1) dV' \cdot \int_{V_{int}} \exp(ik_1 \hat{n}_{inc} \cdot \bar{r}'') \tilde{T}_e(\bar{r}, \hat{n}, \omega) dV'' \quad (2.61)$$

Nótese que la dependencia con el momento angular viene implícito en el número de onda  $k_1$ .

Podemos hacer lo mismo para el campo magnético  $\bar{H}$ , el resultado que se obtiene es idéntico al campo eléctrico

$$\bar{H}(\bar{r}, t) = \tilde{T}_H(\bar{r}, \hat{n}, \omega) \cdot \bar{H}_0 \exp(-i\omega t)$$

Una vez determinado los campos totales  $\bar{E}$  y  $\bar{H}$  podemos obtener el tensor de Poynting complejo aplicando la definición 2.40. Podemos reescribir el resultado en función del tensor complejo incidente:

$$\tilde{P}(\bar{r}) = \tilde{T}_H(\bar{r}, \hat{n}, \omega) \cdot \tilde{P}_{inc}(\bar{r}) \cdot [\tilde{T}_E(\bar{r}, \hat{n}, \omega)]^{T*} \quad (2.62)$$

$$\tilde{P}_{inc}(\bar{r}) = \frac{1}{2} \bar{H}_0 \otimes \bar{E}_0^* \quad (2.63)$$

Es decir el efecto del *scattering* se traduce en el tensor de Poynting complejo en introducir las transformaciones  $\tilde{T}_H$  y  $[\tilde{T}_E]^{T*}$ .

## 2.8.4 Scattering policromático por objetos compactos

Consideraremos ahora el campo incidente, una onda policromática, dado que esta se puede describir como una suma de ondas planas, podemos aplicar el principio de superposición aprovechando los cálculos realizados en el subapartado anterior.

De las ecuaciones 2.41 y 2.42 donde ahora sustituimos los campos incidentes  $\bar{E}_n(\bar{r})$ ,  $\bar{H}_n(\bar{r})$  por  $\tilde{T}_E(\bar{r}, \hat{n}, \omega_n) \cdot \bar{E}_0$ ,  $\tilde{T}_H(\bar{r}, \hat{n}, \omega_n) \cdot \bar{H}_0$  tenemos pues, el siguiente resultado

$$\bar{E}(\bar{r}, t) = \text{Re} \sum_{n=1}^N \tilde{T}_E(\bar{r}, \hat{n}, \omega_n) \cdot \bar{E}_0 \exp(-i\omega_n t) \quad (2.64)$$

$$\bar{H}(\bar{r}, t) = \text{Re} \sum_{n=1}^N \tilde{T}_H(\bar{r}, \hat{n}, \omega_n) \cdot \bar{H}_0 \exp(-i\omega_n t) \quad (2.65)$$

Podemos de nuevo promediar sobre tiempos largos comparado con  $\frac{2\pi}{|\omega_n - \omega_{n'}|}$  y aplicar la definición del tensor de Poynting obtendremos los mismos resultados que en las ecuaciones 2.43, 2.44 y 2.45, solo que ahora el tensor de Poynting complejo de cada onda monocromática componente, hay que añadir las transformaciones  $\tilde{T}_H$  y  $[\tilde{T}_E]^{T*}$ . Quedando el resultado como

$$\tilde{P}(\bar{r}) = \sum_{n=1}^N \tilde{T}_H(\bar{r}, \hat{n}, \omega_n) \cdot \tilde{P}_n^{inc}(\bar{r}) \cdot [\tilde{T}_E(\bar{r}, \hat{n}, \omega_n)]^{T*}$$

Por lo que tenemos que el tensor total es

$$\langle \tilde{P}(\bar{r}, t) \rangle = \text{Re} \sum_{n=1}^N \tilde{T}_H^T(\bar{r}, \hat{n}, \omega_n) \cdot \langle \tilde{P}_n^{inc}(\bar{r}) \rangle \cdot [\tilde{T}_E(\bar{r}, \hat{n}, \omega_n)]^* \quad (2.66)$$

## 2.9 Scattering en la zona de campo lejano

El campo en las cercanías y en el interior del un objeto dispersor, muestra por lo general un comportamiento complejo. Encontramos que, a medida que nos alejamos del objeto dispersor el campo de *scattering*, progresivamente se va transformando en una onda esférica saliente, independientemente de la naturaleza del objeto. Este comportamiento universal del campo de *scattering* en la llamada zona de campo juega un importante papel en el teoría del *scattering* electromagnético, por lo que en esta sección derivaremos las expresiones que se corresponden al régimen en el campo lejano y discutiremos sus criterios y su aplicabilidad.

Podemos denotar como  $\vec{\rho}' = \vec{r} - \vec{r}'$  donde  $\vec{r}'$  es el vector que describe la posición del objeto y  $\vec{r}$  un punto de observación externo. Si asumimos lo siguiente

$$k_1 \rho' \gg 1 \quad (2.67)$$

Válido para cualquier  $\vec{r}' \in V_{int}$  y con  $\rho' = |\vec{\rho}'|$ , es decir el módulo del vector. El término de scattering de la ecuación 2.57 se transforma en :

$$\vec{E}_{scatt}(\vec{r}) = \frac{k_1^2}{4\pi} \int_{V_{int}} \frac{\exp(ik_1 \rho')}{\rho'} [m(\vec{r}')^2 - 1] (\tilde{I} - \hat{\rho}' \otimes \hat{\rho}') \vec{E}(\vec{r}') dV' \quad (2.68)$$

Donde  $\hat{\rho}'$  representa el vector unidad con dirección  $\vec{\rho}'$ . En la siguiente imagen podemos ver esquematizado algunos parámetros:

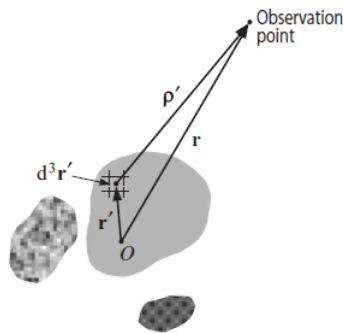


Figura 7: Tomada de [1]

La ecuación anterior nos indica dos consecuencias importantes, la primera de ellas es que, desde cualquier punto de observación externo al objeto el campo dispersado se puede interpretar como una suma de pequeñísimas ondas que, son producidas por un volumen infinitesimal que forman el interior del objeto. La segunda consecuencia es que cada una de estas ondas son transversales esféricas como se puede observar en la siguiente imagen :

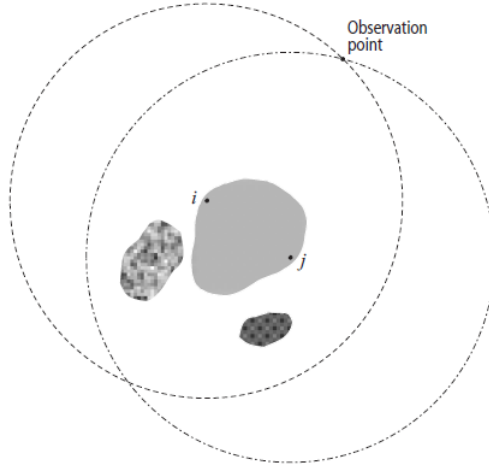


Figura 8: Tomada de [1]

Dado que estamos usando la identidad  $\tilde{I}$ , que en coordenadas esféricas queda como  $\tilde{I} = \hat{\rho}' \otimes \hat{\rho}' + \hat{\phi}' \otimes \hat{\phi}' + \hat{\theta}' \otimes \hat{\theta}'$ , el factor  $\bar{E} \cdot (\tilde{I} - \hat{\rho}' \otimes \hat{\rho}')$  asegura que cada onda sea transversal, es decir, la dirección de propagación  $\hat{\rho}$ , y el vector campo eléctrico son ortogonales en el punto de observación :

$$0 = \hat{\rho} \cdot (\tilde{I} - \hat{\rho}' \otimes \hat{\rho}') \bar{E}(\bar{r}') \quad (2.69)$$

Sí colocamos a continuación el sistema de laboratorio O en un entorno cercano al centro geométrico del objeto dispersor, y considerando *scattering* en la zona de campo lejano, es decir considerando que  $r \gg r'$  para cualquier  $\bar{r}' \in V_{int}$  podemos entonces realizar la siguiente aproximación :

$$\hat{\rho}' \otimes \hat{\rho}' \approx \hat{r} \otimes \hat{r} \quad (2.70)$$

con lo que

$$\rho' = |\bar{r} - \bar{r}'| = r \sqrt{1 - 2 \frac{\hat{r} \cdot \bar{r}'}{r} + \frac{r'^2}{r^2}} \approx r - \hat{r} \cdot \bar{r}' + \frac{r'^2}{r} \quad (2.71)$$

Los dos últimos términos se pueden eliminar en la aproximación para el denominador en la ecuación 2.68, es decir  $\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{r}$ , podemos suponer adicionalmente que  $\frac{k_1 r'^2}{2r} \ll 1$  de esta forma también podemos aproximar el término exponencial  $\exp(ik_1 \rho') \approx \exp(ik_1(r - \hat{r} \cdot \bar{r}'))$ . Finalmente introduciendo las aproximaciones anteriores obtenemos :

$$\bar{E}_{scatt}(\bar{r}) = \frac{k_1^2}{4\pi} (\tilde{I} - \hat{r} \otimes \hat{r}) \frac{\exp(ik_1 r)}{r} \int_{V_{int}} \exp(-ik_1 \hat{r} \cdot \bar{r}') [m(\bar{r}')^2 - 1] \bar{E}(\bar{r}') dV'$$

La expresión anterior es el resultado principal de la aproximación del campo lejano, y demuestra que en distancias grandes desde el objeto, el campo de *scattering* se puede ver como onda esférica centrada en el sistema de referencia O y propagándose en la dirección  $\hat{r}$ . Además de que el campo decae con inversa de la distancia, verifica que  $\hat{r} \cdot \bar{E}_{scatt} = 0$  (solo tiene componente  $\theta$  y  $\phi$ ) como habíamos mencionado previamente.

Podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\bar{E}_{scatt}(\bar{r}) = \frac{\exp(ik_1 r)}{r'} \bar{E}_{scatt}(\hat{r}) \quad (2.72)$$

El término que corresponde a  $\bar{E}_{scatt}(\hat{r})$  (no confundir con  $\bar{E}_{scatt}(\bar{r})$  más adelante) indica como se distribuye angularmente el campo de *scattering*.

### 2.9.1 Criterios teóricos para el límite del campo lejano

Sí llamamos  $a$ , al radio de la esfera de menor tamaño circunscrito al objeto dispersor centrado  $O$ . Entonces las aproximaciones realizadas anteriormente se puede resumir como:

$$k_1(r - a) \gg 1 \quad (2.73)$$

$$r \gg a \quad (2.74)$$

$$r \gg \frac{k_1 a^2}{2} \quad (2.75)$$

Podemos interpretar los tres criterios anteriores para considerar el campo lejano. La primera de ellas parece claro, nos indica que la distancia al punto de observación tiene que ser mucho mayor que la longitud de onda del medio externo, esto asegura que las ondas dispersadas por cualquier elemento de volumen dentro del objeto progresa como una onda esférica en el lejano punto de observación.

La segunda de ellas, también es fácil de interpretar, pues nos indica que la distancia ha de ser mucho mayor que en comparación con el tamaño del objeto. Esto nos asegura que las ondas esféricas generadas por el elemento de volumen se propaguen esencialmente en la misma dirección. En la siguiente imagen podemos observarlo:

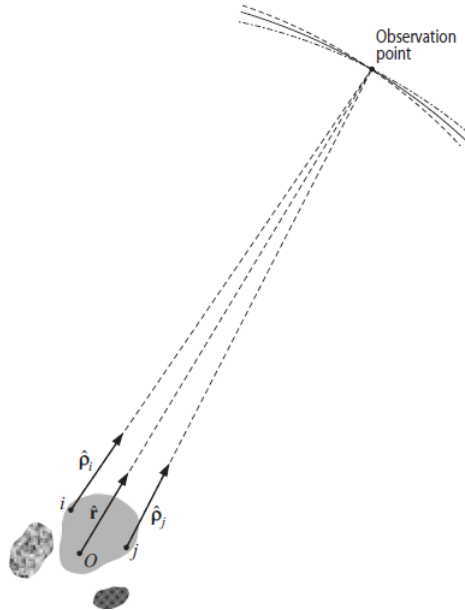


Figura 9: tomada de [1]

La última inecuación es un poco más sutil, observemos la siguiente figura:

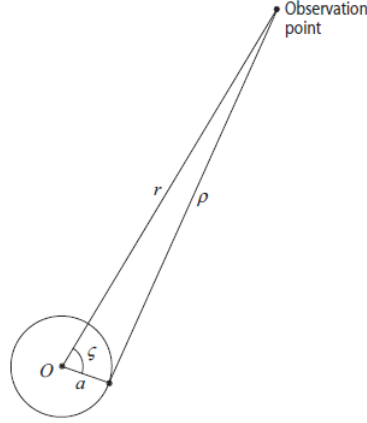


Figura 10: Tomada de [1]

La diferencia de fase entre los puntos 0, origen de coordenadas el el punto situado en la superficie de la esfera viene dada por

$$k_1(\rho - a) = \frac{k_1 a^2}{2r} - ak_1 \cos \zeta$$

El primer término en el segundo miembro de está ecuación es dependiente de  $r$ , mientras que el segundo término es completamente independiente de  $r$ . Por tanto de aquí podemos interpretar que  $\frac{k_1 a^2}{2} \ll r$  nos indica que, el punto de observación está tan lejos del volumen fuente, que la diferencia de fase entre las dos trayectorias es independiente de  $r$  para cualquier dirección. Como consecuencia tenemos que, en el punto de observación, las superficies de fase constante corresponde a una esfera centrada en el centro geométrico del objeto. Esto se debe a que las ondas generadas por cada elemento de volumen en la fuente coincide localmente cuando se llega al punto de observación que se ubica en el campo lejano.

## 2.9.2 Operador scattering diádico y matriz amplitud de scattering

Considerando una onda electromagnética plana sin la dependencia temporal  $\exp(-i\omega t)$  :

$$\bar{E}_{inc}(\bar{r}) = \bar{E}_0 \exp(ik_1 \hat{n} \cdot \bar{r}) \quad (2.76)$$

Y aplicando las ecuaciones 2.58 y 4.9 transformamos las ecuación de la onda incidente en el dispersado para el campo lejano.

$$\bar{E}_{scatt}(\bar{r}) = \frac{\exp(ik_1 r)}{r} \tilde{A}(\hat{n}_{scatt}, \hat{n}_{inc}) \cdot \bar{E}_0$$

Donde  $\hat{n}_{scatt} = \hat{r}$  y  $\tilde{A}(\hat{n}_{scatt}, \hat{n}_{inc})$  es el operador *scattering* diádico . Podemos ver que se han aplicado implícitamente las condiciones de campo lejano al aplicar la ecuación 4.9



$\tilde{A}$  solo depende de la dirección del campo incidente y de *scattering*, es independiente del valor  $\bar{E}_0$ . Se sigue que como  $\hat{r} \cdot \bar{E}_{scatt} = 0 \rightarrow \hat{n}_{scatt} \cdot \tilde{A}(\hat{n}_{scatt}, \hat{n}_{inc}) = 0$  imponemos además que  $\tilde{A}(\hat{n}_{scatt}, \hat{n}_{inc}) \cdot \hat{n}_{inc} = 0$ . Con esto el tensor  $\tilde{A}$ , se puede determinar como:

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\hat{n}_{scatt}, \hat{n}_{inc}) &= \frac{1}{4\pi} (\tilde{I} - \hat{n}_{scatt} \otimes \hat{n}_{scatt}) \cdot \int_{V_{int}} \exp(ik_1 \hat{n}_{scatt} \cdot \bar{r}') dV' \\ &\times \int_{V_{int}} \tilde{T}(\bar{r}', \bar{r}'') \exp(ik_1 \hat{n}_{inc} \cdot \bar{r}'') (\tilde{I} - \hat{n}_{inc} \otimes \hat{n}_{inc}) dV'' \end{aligned} \quad (2.77)$$

Este operador permite dar una descripción del comportamiento de una onda plana en régimen de campo lejano, una vez que haya sido dispersado por un objeto. Puede ser de gran utilidad siempre que la onda se pueda expandir como una suma de ondas planas (ondas policromáticas).

Como el tensor  $\tilde{A}$  es ortogonal a  $\hat{n}_{scatt}$  y a  $\hat{n}_{inc}$ , de las nueve componentes del operador  $\tilde{A}$ , solo 4 son independientes en las coordenadas esféricas. Como consecuencia, se suele introducir el parámetro  $\tilde{S}$ , denominado matriz de amplitud de *scattering*, este es una matriz  $2 \times 2$ , que expresa las componentes  $\phi$  y  $\theta$  de la onda electromagnética esférica dispersada en función de la onda plana incidente:

$$\bar{E}_{scatt}(\bar{r}) = \frac{\exp(ik_1 r)}{r} \tilde{S} \bar{E}_0 \quad (2.78)$$

Aquí los vectores  $\bar{E}$  tienen solo dos componentes ( $\phi$  y  $\theta$ )  $\bar{E} = \begin{bmatrix} E_\theta \\ E_\phi \end{bmatrix}$ . Los elementos de la matriz  $\tilde{S}$  tienen dimensiones de longitud y se obtienen en las coordenadas esféricas como :

$$\tilde{S}(\hat{n}_{scatt}, \hat{n}_{inc}) = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{scatt} \cdot \tilde{A} \cdot \hat{\theta}_{inc} & \hat{\theta}_{scatt} \cdot \tilde{A} \cdot \hat{\phi}_{inc} \\ \hat{\phi}_{scatt} \cdot \tilde{A} \cdot \hat{\theta}_{inc} & \hat{\phi}_{scatt} \cdot \tilde{A} \cdot \hat{\phi}_{inc} \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

La matriz amplitud de scattering solo depende de la dirección del campo incidente y dispersado, así como el tamaño, forma, composición, y orientación del objeto dispersor. Sí se conoce, permite realizar una descripción completa sobre el campo dispersado en régimen de campo lejano.

Una propiedad fundamental del tensor scattering diádico es la reciprocidad, es decir

$$\tilde{A}(-\hat{n}_{inc}, -\hat{n}_{scatt}) = [\tilde{A}(\hat{n}_{scatt}, \hat{n}_{inc})]^T \quad (2.80)$$

Esta propiedad nos permite interpretar que si intercambiamos la dirección de incidencia y la de *scattering* e invertimos ambas direcciones, entonces el resultado será equivalente a transponer el operador original.

Como consecuencia de esta propiedad podemos ver su efecto en la matriz amplitud de scattering si aplicamos la reciprocidad en la ecuación 2.79. obtendremos que :

$$\tilde{S}(-\hat{n}_{inc}, -\hat{n}_{scatt}) = \begin{bmatrix} S_{11} & -S_{21} \\ -S_{12} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

Donde  $S_{ij}$  hace referencia a los elementos de la matriz original. Otra consecuencia interesante propiedad de la reciprocidad es que si hay retrodispersión, es decir si la dirección de incidencia y la de dispersión son opuestas ( $\hat{n}_{inc} = \hat{n}$  y  $\hat{n}_{scatt} = -\hat{n}$ ) entonces

$S_{21}(-\hat{n}, \hat{n}) = -S_{12}(-\hat{n}, \hat{n})$ . Esta propiedad es interesante desde el punto de vista computacional, pues nos permite determinar si la técnica de computación o de medida ha sido adecuada o no.

### 2.9.3 Vector Poynting del campo total en régimen de campo lejano

Aunque conociendo completamente la matriz amplitud de scattering proporciona una descripción completa del proceso de scattering en campo lejano, no siempre se puede obtener experimentalmente, ya que requeriría conocer algunos valores como la fase o la amplitud del campo incidente y dispersado. Es por ello por lo que se prefiere caracterizar los procesos de dispersión en función de parámetros más accesibles experimentalmente.

Unos de estos valores corresponde al valor medio del vector Poynting, que en campo lejano podemos descomponerlo como una suma de tres valores, el incidente, el dispersado, y el tercer término que viene asociado a la interacción del campo dispersado y el campo incidente.

$$\langle \bar{S}(\bar{r}, t) \rangle = \langle \bar{S}_{inc}(\bar{r}, t) \rangle + \langle \bar{S}_{scatt}(\bar{r}, t) \rangle + \langle \bar{S}_{cru}(\bar{r}, t) \rangle$$

Aquí cada suma se obtiene tomando la parte real del vector de Poynting complejo como ya habíamos mencionado anteriormente.

$$\langle \bar{S}_{inc}(\bar{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\bar{E}_{inc}(\bar{r}) \times \bar{H}_{inc}^*(\bar{r}))$$

$$\langle \bar{S}_{scatt}(\bar{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\bar{E}_{scatt}(\bar{r}) \times \bar{H}_{scatt}^*(\bar{r}))$$

$$\langle \bar{S}_{cru}(\bar{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\bar{E}_{inc}(\bar{r}) \times \bar{H}_{scatt}^*(\bar{r}) + \bar{E}_{scatt}(\bar{r}) \times \bar{H}_{inc}^*(\bar{r})) \quad (2.82)$$

Considerando además una onda plana incidente cuyas ecuaciones son  $\bar{E}_{inc}(\bar{r}, t) = \bar{E}_0 \exp(i(\bar{k}\bar{r} - \omega t))$ ,  $\bar{H}_{inc}(\bar{r}, t) = \bar{H}_0 \exp(i(\bar{k}\bar{r} - \omega t))$  y los términos de scattering en campo lejanos ya estudiados,  $\bar{E}_{scatt}(\bar{r}) = \frac{\exp(ik_1 r)}{r} \bar{E}_{1scatt}(\hat{r})$  y  $\bar{H}_{scatt}(\bar{r}) = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}} \frac{\exp(ik_1 r)}{r} \hat{r} \times \bar{E}_{1scatt}(\hat{r})$ , con lo podremos obtener el valor medio del vector Poynting. Si a continuación observamos la siguiente imagen:

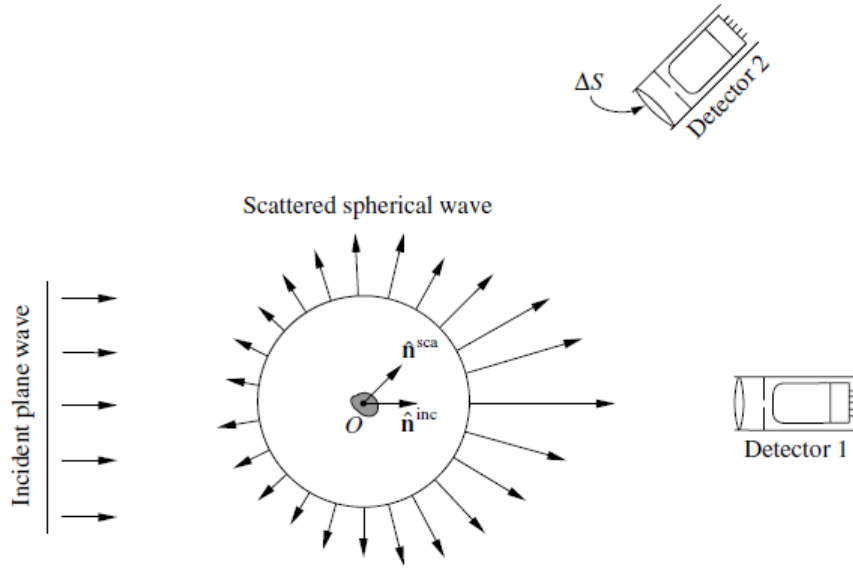


Figura 11: Tomada de [2]

Donde se ha considerado dos detectores, una en la dirección de la onda incidente  $\hat{r} = \hat{n}_{inc}$  y la otra en una dirección arbitraria tal que  $\hat{r} \neq \hat{n}_{inc}$ . Los detectores que no se coloquen en la dirección de la onda plana incidente no medirán el flujo de la onda incidente, solo medirán el dispersado, es decir si  $\hat{r} \neq \hat{n}_{inc} \rightarrow \langle \bar{S}_{inc}(\vec{r}, t) \rangle = 0$ . De esta forma podemos medir aproximadamente, el flujo debido a cada campo.

Trataremos de calcular la potencia recibida  $W$  por cada detector en su superficie  $\Delta S$ . Por ello asumiremos que los detectores se encuentran en la zona de campo lejano, que sus dimensiones son muchos más grandes que la partícula dispersora y la longitud de onda. Con ello tenemos que cuando  $\hat{r} \neq \hat{n}_{inc}$  la potencia registrada es :

$$W(\hat{r}) = \int_{\Delta S} \langle \bar{S}(\vec{r}', t) \rangle \cdot \hat{r} \cdot dS \quad (2.83)$$

$$\approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}} \frac{\Delta S}{r^2} |\bar{E}_{scatt}(\hat{r})|^2 \quad (2.84)$$

Y para cuando  $\hat{r} = \hat{n}$  :

$$\begin{aligned} W(\hat{n}_{inc}) &= \int_{\Delta S} \langle \bar{E}(\vec{r}', t) \rangle \cdot \hat{n}_{inc} \cdot dS \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}} \Delta S |\bar{E}_0| + \int_{\Delta S} (\langle \bar{S}_{scatt}(\vec{r}, t) \rangle + \langle \bar{S}_{cru}(\vec{r}, t) \rangle) \cdot \hat{n}_{inc} dS \\ &\approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}} \Delta S |\bar{E}_0|^2 + \frac{|\bar{E}_{scatt}(\hat{r})|^2}{r^2} - \frac{2\pi}{k_1} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}} \text{Im}(\bar{E}_{scatt}(\hat{r}) \cdot \bar{E}_0^*) \\ &\approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}} \Delta S |\bar{E}_0|^2 - \frac{2\pi}{k_1} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}} \text{Im}(\bar{E}_{scatt}(\hat{r}) \cdot \bar{E}_0^*) + O(r^{-2}) \end{aligned} \quad (2.85)$$

El término correspondiente a  $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}}\Delta S|\bar{E}_0|^2$  es directamente proporcional a la superficie del detector  $\Delta S$  y es la que se obtendría en ausencia de una partícula dispersora. El segundo término  $\frac{2\pi}{k_1}\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}}\text{Im}(\bar{E}_{scatt}(\hat{r}) \cdot \bar{E}_0^*)$  corresponde a la atenuación y es independiente de la superficie del detector.

Concluyendo, si medimos en la dirección de la onda incidente mediremos la potencia obtenida principalmente por la onda incidente atenuada por un factor. Mientras, que si medimos en otra dirección obtendremos la potencia correspondiente al término de dispersión.

## 2.9.4 La matriz fase

Derivaremos a continuación, la relación entre los parámetros de Stokes, el vector coherencia (estudiados ya anteriormente) de la onda incidente y la onda dispersada, por ello mediremos con el detector en una dirección arbitraria diferente a la incidente,  $\hat{r} \neq \hat{n}_{inc}$ . Observaremos que ambas se relacionan mediante una matriz denominada matriz fase o matriz de Mueller.

Para el vector coherencia de la onda incidente al tratarse de una onda plana basta con aplicar la expresión:  $\bar{E}_{inc}(\vec{r}, t) = \bar{E}_0 \exp(i(\vec{k}\vec{r} - \omega t))$  y para la onda dispersada, al tratarse está de una onda esférica descrita por las ecuaciones  $\bar{E}_{scatt}(\vec{r}) = \frac{\exp(ik_1 r)}{r} \bar{E}_{scatt}(\hat{r})$  con que aplicando de nuevo la misma expresión obtenemos que :

$$J_{inc} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{0\phi} E_{0\phi}^* \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{0\theta} E_{0\theta}^* \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{0\theta} E_{0\phi}^* \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{0\phi} E_{0\theta}^* \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

$$J_{scatt}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{\phi}(\vec{r}) E_{\phi}^*(\vec{r}) \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{\theta}(\vec{r}) E_{\theta}^*(\vec{r}) \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{\theta}(\vec{r}) E_{\phi}^*(\vec{r}) \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{\phi}(\vec{r}) E_{\theta}^*(\vec{r}) \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} E_{\phi}(\hat{r}) E_{\phi}^*(\hat{r}) \\ E_{\theta}(\hat{r}) E_{\theta}^*(\hat{r}) \\ E_{\theta}(\hat{r}) E_{\phi}^*(\hat{r}) \\ E_{\phi}(\hat{r}) E_{\theta}^*(\hat{r}) \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

Podemos relacionar ambas expresiones como  $J_{scatt}(\vec{r}) = \frac{1}{r^2} \mathbf{Z}_J(\hat{n}_{inc}, \hat{n}_{scatt}) J_{inc}$ . Donde la matriz  $\mathbf{Z}_J(\hat{n}_{inc}, \hat{n}_{scatt})$ , denominado matriz fase asociado al vector coherencia, se obtiene realizando el producto diádico o tensorial de la matriz amplitud de scattering  $\tilde{S} \otimes \tilde{S}^*$  de tal forma que :

$$\mathbf{Z}_J = \begin{bmatrix} |S_{11}|^2 & S_{11}S_{12}^* & S_{12}S_{12}^* & |S_{12}|^2 \\ S_{11}S_{12}^* & S_{11}S_{22}^* & S_{12}S_{21}^* & S_{12}S_{22}^* \\ S_{21}S_{11}^* & S_{21}S_{12}^* & S_{22}S_{11}^* & S_{21}S_{12}^* \\ |S_{21}|^2 & S_{21}S_{12}^* & S_{22}S_{12}^* & |S_{22}|^2 \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

Si realizamos el mismo procedimiento para los parámetros de Stokes, obtenemos que  $I_{scat} = \frac{1}{r^2} \mathbf{Z}(\hat{n}_{inc}, \hat{n}_{scat}) \mathbf{I}_{inc}$ . Donde  $\mathbf{Z}(\hat{n}_{inc}, \hat{n}_{scat})$  describe la transformación de los parámetros de Stokes de la onda incidente a la onda dispersada. Como la relación entre  $\mathbf{I}$  y  $\mathbf{J}$  viene dada por la matriz  $\mathbf{D}$  definido en 2.35, realizando un poco de álgebra se puede llegar fácilmente a que :

$$\mathbf{Z}(\hat{n}_{inc}, \hat{n}_{scat}) = \mathbf{D} \mathbf{Z}_J(\hat{n}_{inc}, \hat{n}_{scat}) \mathbf{D}^{-1}$$

De esta manera podemos expresar los valores de  $\mathbf{Z}(\hat{n}_{scat}, \hat{n}_{inc})$  que se trata de una matriz de  $4 \times 4$ , en función de los elementos de la matriz amplitud de *scattering* . Se ha tenido en cuenta que :

$$\mathbf{I}_{scat} = \mathbf{D} \mathbf{J}_{scat} = \mathbf{I} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}} \begin{bmatrix} E_\phi E_{0\phi}^* + E_\theta E_\theta^* \\ E_\theta E_\theta^* - E_\phi E_\phi^* \\ -E_\theta E_\phi^* - E_\phi E_\theta^* \\ i(E_\phi E_\theta^* - E_\theta E_\phi^*) \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

y

$$\mathbf{I}_{inc} = \mathbf{D} \mathbf{J}_{inc} = \mathbf{I} = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}} \begin{bmatrix} E_{0\phi}(\hat{r}) E_{0\phi}^*(\hat{r}) + E_{0\theta}(\hat{r}) E_{0\theta}^*(\hat{r}) \\ E_{0\theta}(\hat{r}) E_{0\theta}^*(\hat{r}) - E_{0\phi}(\hat{r}) E_{0\phi}^*(\hat{r}) \\ -E_{0\theta}(\hat{r}) E_{0\phi}^*(\hat{r}) - E_{0\phi}(\hat{r}) E_{0\theta}^*(\hat{r}) \\ i(E_{0\phi}(\hat{r}) E_{0\theta}^*(\hat{r}) - E_{0\theta}(\hat{r}) E_{0\phi}^*(\hat{r})) \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

Con esto podemos determinar el estado de polarización de la onda dispersada a partir de la matriz  $\mathbf{Z}(\hat{n}_{inc}, \hat{n}_{scat})$ , es decir conociendo sus elementos o conociendo  $\tilde{S}$ , se puede estudiar como ha afectado la dispersión al estado de polarización de onda de *scattering*.

### 2.9.5 La matriz de extinción

Consideramos ahora el caso en el que medimos en la dirección de la onda incidente  $\hat{r} = \hat{n}_{inc}$ . Teniendo en cuenta que el campo total es la suma del campo incidente y dispersado podemos expresar su vector coherencia como

$$\mathbf{J}_T(\bar{r}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \begin{bmatrix} E_\phi(\bar{r}) E_\phi^*(\bar{r}) \\ E_\theta(\bar{r}) E_\theta^*(\bar{r}) \\ E_\theta(\bar{r}) E_\phi^*(\bar{r}) \\ E_\phi(\bar{r}) E_\theta^*(\bar{r}) \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

.Si integramos  $\mathbf{J}(\bar{r})$  en la superficie del detector  $\Delta S$  y considerando los resultados anteriores 2.18, 2.72, 2.85 operando podemos llegar a obtener

$$\mathbf{J}_T(\bar{r}) \Delta S = \mathbf{J}_{inc}(\bar{r}) \Delta S - \mathbf{K}_J(\hat{n}_{inc}) \mathbf{J}_{inc} + O(r^{-2}) \quad (2.93)$$

Donde  $\mathbf{K}_J$  es el llamado matriz de extinción asociado al vector coherencia que expresados en los elementos de la matriz amplitud de *scattering* queda :

$$\mathbf{K}_J = \begin{bmatrix} S_{11}^* - S_{11} & S_{12}^* & -S_{12} & 0 \\ S_{21}^* & S_{22}^* - S_{11} & 0 & -S_{12} \\ -S_{21} & 0 & S_{11}^* - S_{22} & S_{12}^* \\ 0 & -S_{21} & S_{21}^* & S_{22}^* - S_{22} \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

De nuevo intercambiando del vector coherencia a los parámetros de Stokes llegamos a que :

$$\mathbf{I}_T(\bar{r}_{inc})\Delta S = \mathbf{I}_{inc}\Delta S - \mathbf{K}_J(\hat{n}_{inc})\mathbf{I}_{inc} + O(r^{-2}) \quad (2.95)$$

Donde  $\mathbf{K}$  es la matriz de extinción asociado a los parámetros de Stokes y su relación con  $\mathbf{K}_J$  viene dada, al igual que en la matriz fase, por la expresión :

$$\mathbf{K}(\hat{n}_{inc}, \hat{n}_{scatt}) = D\mathbf{K}_J(\hat{n}_{inc}, \hat{n}_{scatt})D^{-1} \quad (2.96)$$

## 2.10 El método de la matriz-T y la teoría de Lorenz-Mie

El método de la matriz-T es una técnica computacional, propuesta para calcular las propiedades y características del campo electromagnético dispersado, principalmente por partículas no esféricas. Aunque se puede aplicar a diferentes tipos de partículas, sus aplicaciones se centran en las partículas con simetrías. Para el caso simétricamente esférico este método converge en la solución de Lorenz -Mie

Esta técnica se basa en expandir el campo incidente y dispersado en funciones denominados vectores armónicos esféricos que se han descrito en el apéndice 4.3 y aplicar las condiciones de contorno en las superficies del objeto dispersor, tanto para el incidente como para el campo dispersado.

Una vez descompuesto así el objetivo es aplicar la linealidad de las ecuaciones de Maxwell para obtener una relación entre los coeficientes del campo incidente y dispersado, similar a la que hay en la matriz amplitud de *scattering* , los coeficientes se relacionan mediante la matriz-T.

Los resultados teóricos son un tanto extensos y complejos, por lo que aquí solo haremos una breve descripción de los resultados principales.

### 2.10.1 La matriz-T

Si consideramos una onda incidente plana, sin incluir la dependencia temporal:

$$\bar{E}(r) = \bar{E}_0 \exp(ik_1 \hat{n} \cdot \bar{r}) \quad (2.97)$$

$$\hat{r} \cdot \bar{E}_0 = 0 \quad (2.98)$$

Y una partícula dispersora arbitraria. Expandimos los campos incidentes y dispersados como :

$$\bar{E}_{inc}(\bar{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} a_{mn} RgM_{mn}(k_1 r) + b_{mn} RgN_{mn}(k_1 r) \quad (2.99)$$

$$\bar{E}_{scatt}(\bar{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} p_{mn} M_{mn}(k_1 r) + q_{mn} N_{mn}(k_1 r) \quad (2.100)$$

Con  $r > r_{min}$  donde  $r_{min}$  hace referencia al radio de la esfera más pequeña circunscrita en el objeto dispersor. Las funciones :  $RgM_{mn}(k_1 r)$  ,  $RgN_{mn}(k_1 r)$  ,  $M_{mn}(k_1 r)$  y  $N_{mn}(k_1 r)$  representan a los vectores armónicos esféricos, y  $a_{mn}$  ,  $b_{mn}$  ,  $p_{mn}$  y  $q_{mn}$  representan a los

coeficientes que acompañan a los armónicos esféricos.  $RgM_{mn}(k_1r)$ ,  $RgN_{mn}(k_1r)$  se caracterizan por ser finitos en el origen mientras que  $M_{mn}(k_1r)$ ,  $N_{mn}(k_1r)$  cumplen con la condición de radiación de Silver-Mueller en el infinito que garantizan que las componentes transversales decaigan con la distancia como  $\frac{1}{r}$ , al mismo tiempo que garantizan también que la componente radial decaiga mucho más rápido que  $\frac{1}{r}$ .

La expansión de los coeficientes de la onda plana incidente están dados por las ecuaciones :

$$a_{mn} = 4\pi(-1)^m i^n d_n \bar{E}_0 \cdot \bar{C}_{mn}^*(\theta) e^{-im\phi_{inc}} \quad (2.101)$$

$$b_{mn} = 4\pi(-1)^m i^{n-1} d_n \bar{E}_0 \cdot \bar{B}_{mn}^*(\theta) e^{-im\phi_{inc}} \quad (2.102)$$

Donde  $d_n$ ,  $C_{mn}(\theta)$  y  $B_{mn}(\theta)$  toman la forma :

$$d_n = \left[ \frac{2n+1}{4\pi n(n+1)} \right]^{1/2}$$

$$\bar{C}_{mn}(\theta) = \hat{\theta} \tau_{mn}(\theta) - \hat{\phi} i \pi_{mn}(\theta)$$

$$\bar{B}_{mn}(\theta) = \hat{\theta} \pi_{mn}(\theta) - \hat{\phi} i \tau_{mn}(\theta)$$

Las funciones  $\tau_{mn}(\theta)$  y  $\pi_{mn}(\theta)$  están definidas un poco más adelante en 2.113 y 2.114.

Debido a la linealidad de las ecuaciones de Maxwell, las relaciones entre los valores  $a_{mn}$  y  $b_{mn}$  de los campos incidentes y los valores  $p_{mn}$  y  $q_{mn}$  de los campos dispersados ha de ser lineal y está dado por la matriz T de forma :

$$p_{mn} = \sum_{n'=1}^{n'=\infty} \sum_{m'=-n'}^{m'=n'} (T_{mnm'n'}^{11} a_{m'n'} + T_{mnm'n'}^{12} b_{m'n'}) \quad (2.103)$$

$$q_{mn} = \sum_{n'=1}^{n'=\infty} \sum_{m'=-n'}^{m'=n'} (T_{mnm'n'}^{21} a_{m'n'} + T_{mnm'n'}^{22} b_{m'n'}) \quad (2.104)$$

Podemos expresar el resultado anterior de una forma más compacta, es decir en forma matricial :

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (2.105)$$

La ecuación anterior es esencial en este método. En efecto, si conocemos la matriz T podemos deducir de las ecuaciones, 2.101, 2.102, 2.103 y 2.104 la relación entre el campo incidente y el campo dispersado a partir de sus coeficientes. Se puede también obtener el operador *scattering* diádico definido en la ecuación, conseguir los valores asociados a la matriz amplitud de *scattering*, (no lo mostraremos aquí, pues las relaciones son muy extensas y no es el objetivo, pero se puede ver en [2]) y con ella la matriz fase y la matriz extinción estudiados en capítulos anteriores .

Una característica esencial de la matriz-T, es que solo depende de las características físicas y geométricas de la partícula dispersora, tales como el tamaño, la forma, la morfología, es completamente independiente de la dirección de la onda incidente, y de los estados de polarización de esta.

### 2.10.2 La teoría de Lorenz-Mie

La teoría de Lorenz-Mie, a veces también denominado solución de Lorent-Mie, es un caso particular del anterior método, se obtiene de las relaciones anteriores considerando una partícula de *scattering* esféricamente simétrica, en ese caso es mucho más factible obtener la matriz amplitud de *scattering*. Las relaciones quedan :

$$S_{11}(\hat{n}_{scatt}\hat{n}_{inc},) = \frac{i}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} \frac{2n+1}{n(n+1)} e^{im(\phi_{scatt}-\phi_{inc})} [a_n \tau_{mn}(\theta_{scatt}) \tau_{mn}(\theta_{inc}) + b_n \pi_{mn}(\theta_{inc}) \pi_{mn}(\theta_{scatt})] \quad (2.106)$$

$$S_{12}(\hat{n}_{scatt}\hat{n}_{inc},) = \frac{1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} \frac{2n+1}{n(n+1)} e^{im(\phi_{scatt}-\phi_{inc})} [\tau_{mn}(\theta_{scatt}) \pi_{mn}(\theta_{scatt})] (a_n + b_n) \quad (2.107)$$

$$S_{21}(\hat{n}_{scatt}\hat{n}_{inc},) = -\frac{1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} \frac{2n+1}{n(n+1)} e^{im(\phi_{scatt}-\phi_{inc})} [\tau_{mn}(\theta_{inc}) \pi_{mn}(\theta_{inc})] (a_n + b_n) \quad (2.108)$$

$$S_{22}(\hat{n}_{scatt}\hat{n}_{inc},) = -\frac{1}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} \frac{2n+1}{n(n+1)} e^{im(\phi_{scatt}-\phi_{inc})} [\tau_{mn}(\theta_{inc}) \pi_{mn}(\theta_{scatt})] (a_n + b_n) \quad (2.109)$$

Se podría simplificar más si colocamos el sistema de coordenadas de tal forma que en el eje z, corresponda a la dirección de propagación y  $\phi_{scatt} = \phi_{inc}$

$$S_{11}(\theta_{scatt}, \phi_{inc}, 0, \phi_{inc}) = \frac{i}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [b_n \pi_n(\theta_{scatt}) + a_n \tau_n(\theta_{scatt})] \quad (2.110)$$

$$S_{12}(\theta_{scatt}, \phi_{inc}, 0, \phi_{inc}) = S_{21}(\theta_{scatt}, \phi_{inc}, 0, \phi_{inc}) = 0 \quad (2.111)$$

$$S_{22}(\theta_{scatt}, \phi_{inc}, 0, \phi_{inc}) = \frac{i}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [b_n \tau_n(\theta_{scatt}) + a_n \pi_n(\theta_{scatt})] \quad (2.112)$$

La funciones angulares  $\pi_n(\theta)$  y  $\tau_n(\theta)$  están dadas por :

$$\pi_n(\theta) = -\frac{1}{\sin \theta} P_n^l(\cos \theta) \quad (2.113)$$

$$\tau_n(\theta) = \pi_n(\theta) = -\frac{d}{d\theta} P_n^l(\cos \theta) \quad (2.114)$$

Siendo  $P_n^l$  las funciones de Legendre descritas en 4.12

Los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  son dependientes del índice de refracción  $m$  y del parámetro  $x = k_1 r$  :

$$a_n = \frac{m\psi_n(mx)\psi'_n(x) - \psi_n(x)\psi'_n(mx)}{m\psi_n(mx)\xi'_n(x) - \xi_n(x)\psi'_n(mx)} \quad (2.115)$$

$$b_n = \frac{m\psi_n(mx)\psi'_n(x) - \psi_n(x)\psi'_n(mx)}{m\psi'_n(mx)\xi_n(x) - \xi'_n(x)\psi_n(mx)} \quad (2.116)$$



Con  $\psi_n(x) = xj_n(x)$  y  $\xi_n(x) = xh_n^1(x)$ , donde las funciones  $j_n(x)$ , son las funciones de Bessel y  $h_n^1$  las funciones de Hankel de primera clase definidas en el apéndice 4.10. La notación  $\prime$  indica dentro del volumen del objeto dispersor. Como se ha mencionado antes, una vez determinado la matriz  $S$ , podemos obtener más propiedades del *scattering* a partir de la matriz de fase, matriz de extinción ...

En general, la teoría de Mie se suele utilizar para partículas dispersoras cuyos diámetros, no son significativamente mayores que la longitud de onda incidente (del tamaño menor que  $1\mu m$ ), mientras que el método de la matriz  $T$ , se suele utilizar en general para partículas no esféricas, y para partículas cuyo tamaño sea mucho mayor que la longitudes de onda incidentes.

### 3 Conclusion

The theory of scattering is too complex and extensive a theory to be included in the work, that is why a brief description of the main theoretical results has been made, perhaps without, the formalism and the necessary rigor, since no we have deduced most of the expressions. Simply, the expressions taken mostly from [1, 2] have been presented and the main consequences have been described and interpreted. We can summarize some of the most important conclusions of the work.

- It has been seen that the scattering phenomenon does not depend at all on the incident waves, but rather on the physical properties of the scattering particle.
- In a plane wave the scattering effect is given by the dyadic transformation  $\tilde{T}_E$ . If we obtain this operator, applying it directly to the incidence term, we obtain the dispersion term. The operator  $\tilde{T}_E$  also allows us to obtain the Poynting-Stokes tensor of the dispersed field, simply apply the expression 2.62. Once this is obtained, we can calculate the Poynting vector and with it its average energy.
- Polychromatic electromagnetic fields can be obtained as a sum of  $N$  plane waves. As a consequence we can apply the same properties described in the previous paragraph considering each plane wave and then add to obtain the total field.
- The expression 2.58 that indicates in general terms the result of the  $\bar{E}_{scatt}$  term, usually does not have an exact solution, so analytical or computational methods are usually used. such as the T-matrix method or Lorent-Mie theory.
- The dispersion term is usually complex, for this reason it is usually resorted to or it is used to work in a far field where a spherical plane wave is in the form.
- In order to be considered as being in the far field regime, the conditions 2.73, 2.74 y 2.75 must be met.
- The scattering amplitude matrix  $\tilde{S}$  if known gives us all the information about the behavior of the  $\bar{E}_{scatt}$ , in the far field regime, in addition to allowing us to calculate the phase matrix and the extinction matrix.
- The phase matrix gives us the relationship between the Stokes parameters of the incident wave and the scattered wave. With which we can calculate the polarization state of the scattering term in different directions to the incident wave

- The extinction matrix indicates, in second order approximation, the energy loss in the direction of the incident wave.
- The Lorenz-Mie theory and the T-matrix method are current computational methods that allow us to approximate the scattered field by calculating its coefficients. The first case for spherical and smaller particles, and the second for particles with any morphology.

## 4 Apéndice

### 4.1 El producto diádico

Definimos una díada  $\tilde{A}$ , como el producto diádico o tensorial de dos vectores de forma que  $\tilde{A} \equiv \bar{A} \otimes \bar{B}$ . Este producto diádico se puede representar en coordenadas cartesianas como una matriz cuyos elementos son

$$\bar{A} \otimes \bar{B} = \begin{pmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Donde  $\bar{A} = (a_x \ a_y \ a_z)$  y  $\bar{B} = (b_x \ b_y \ b_z)$ . También podemos obtener el resultado anterior como la representación del producto de matrices considerando cada vector como una matriz columna y fila, es decir :

$$\bar{A} \otimes \bar{B} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} (b_x \ b_y \ b_z) \quad (4.2)$$

Podemos enumerar algunas propiedades del producto diádico :

#### 1. Linealidad

$$\bar{A} \otimes (b\bar{B} + c\bar{C}) = b\bar{A} \otimes \bar{B} + c\bar{A} \otimes \bar{C} \quad (4.3)$$

#### 2. Por lo general no es conmutativo

$$\bar{A} \otimes \bar{B} \neq \bar{B} \otimes \bar{A}$$

#### 3. Es asociativo con el producto escalar

$$\bar{C} \cdot (\bar{A} \otimes \bar{B}) = (\bar{C} \cdot \bar{A}) \otimes \bar{B} \quad (4.4)$$

#### 4. Es asociativo con el producto vectorial

$$(\bar{A} \otimes \bar{B}) \times \bar{C} = \bar{A} \otimes (\bar{B} \times \bar{C}) \quad (4.5)$$

## 4.2 El operador y la función de Green

Definimos el operador de Green como:

$$\tilde{G}(\bar{r}, \bar{r}') = (\tilde{I} + \frac{1}{k^2} \nabla \otimes \nabla) g(\bar{r}, \bar{r}') \quad (4.6)$$

Donde  $\tilde{I}$ , es el operador identidad,  $k$  un número real positivo (número de onda),  $\nabla$  es el operador nabla, y  $g(\bar{r}, \bar{r}')$  es la función de Green empleada en electromagnetismo, es decir:

$$g(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{\exp(ik|\bar{r} - \bar{r}'|)}{4\pi|\bar{r} - \bar{r}'|} \quad (4.7)$$

Podemos enumerar algunas propiedades de utilidad :

1. El operador de Green es simétrico, es decir verifica que:  $\tilde{G}(\bar{r}, \bar{r}') = \tilde{G}(\bar{r}', \bar{r})$  y  $\tilde{G}(\bar{r}, \bar{r}') = [\tilde{G}(\bar{r}', \bar{r})]^T$ .
2. Es invariante frente a traslaciones, o sea :  $\tilde{G}(\bar{r}, \bar{r}') = \tilde{G}(\bar{r} + \bar{R}, \bar{r}' + \bar{R})$ .
3. Verifica que  $\lim_{|\bar{r} - \bar{r}'| \rightarrow 0} g(\bar{r}, \bar{r}') = 0$
4. Identidad díadica  $\nabla \times (\nabla \otimes \nabla) = (\nabla \times \nabla) \otimes \nabla = \tilde{0}$
5. Se podría demostrar que si  $kr \gg 1$  (una condición para el campo lejano) entonces :

$$\tilde{G}(\bar{r}, 0) = (\tilde{I} - \hat{r} \otimes \hat{r}) \frac{\exp(ikr)}{4\pi r} \quad (4.8)$$

Calcularemos a continuación el operador de Green para en el caso en el que nos situemos en régimen de campo lejano donde las condiciones se detallan en la subsección 2.9.1 . Usaremos por ello coordenadas esféricas donde el operador  $\nabla$  toma la forma  $\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{r} + \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{1}{r \sin \theta}$ . Aproximando la expresión  $|\bar{r} - \bar{r}'| = r \sqrt{1 - 2 \frac{\hat{r} \cdot \bar{r}'}{r} + \frac{r'^2}{r^2}}$  a  $|\bar{r} - \bar{r}'| \approx r - \hat{r} \cdot \bar{r}' + \frac{r'^2}{2r}$  y considerando la propiedad de traslación junto con la ecuación 4.8 . Obtenemos que

$$\tilde{G}(\bar{r}, \bar{r}') = (\tilde{I} - \hat{r} \otimes \hat{r}) \frac{\exp(ikr)}{4\pi r} \exp(-ik\hat{r} \cdot \bar{r}') \quad (4.9)$$

Que es el operador de Green para campos lejanos

## 4.3 Escalares y vectores armónicos esféricos

Las funciones de Bessel de Primera clase se definen como

$$j_n(x) = x^n \left( -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left( \frac{\sin x}{x} \right)$$

y las de segunda clase como

$$y_n(x) = -x^n \left( -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left( \frac{\cos x}{x} \right)$$

Las funciones de Hankel de primera y segunda clase se definen como una combinación lineal de funciones de Bessel :

$$h_1^{(1)}(x) = j_n(x) + iy_n(x) \quad (4.10)$$

$$h_1^{(2)}(x) = j_n(x) - iy_n(x) \quad (4.11)$$

Las funciones  $P_l^m$  son las funciones de Legendre que escritos en términos de los polinomios de Legendre quedan :

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l \quad (4.12)$$

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

Las funciones vectoriales  $RgM_{mn}(k_1r)$ ,  $RgN_{mn}(k_1r)$ ,  $M_{mn}(k_1r)$  y  $N_{mn}(k_1r)$  quedan como sigue :

$$RgM_{mn}(k_1r) = \gamma_{mn} \nabla \times Rg\psi_{mn}(k_1r, \theta, \phi)$$

$$M_{mn}(k_1r) = \gamma_{mn} \nabla \times \psi_{mn}(k_1r, \theta, \phi)$$

$$RgN_{mn}(k_1r) = \frac{1}{k} \nabla \times RgM_{mn}(k_1r, \theta, \phi)$$

$$N_{mn}(k_1r) = \frac{1}{k} \nabla \times M_{mn}(k_1r, \theta, \phi)$$

Con el valor de  $\psi_{mn}$ ,  $Rg\psi_{mn}$  y  $\gamma_{mn}$  dados por las expresiones:

$$Rg\psi_{mn} = j_n(k_1r) P_n^m(\cos \phi) e^{im\phi}$$

$$\psi_{mn}(k_1r, \theta, \phi) = h_n^1(k_1r) P_n^m(\cos \phi) e^{im\phi}$$

$$\gamma_{mn} = \left( \frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!} \right)^{1/2}$$

## Referencias

- [1] Michael I. Mishchenko  
Electromagnetic Scattering by Particle and Particle Groups An Introduction
- [2] Michael. Mishchenko, Larry.D Travis, Andrew A.lacis  
Scattering, Absortion and Emission of Light by Small Particles
- [3] <https://revistasinvestigacion.unmsm.edu.pe/index.php/fisica/article/download/13558/11969/A>
- [4] <https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/6892/10Dgv10de16.pdf?sequence=10&isAllowed=y>
- [5] <https://arxiv.org/pdf/physics/0308112.pdf>
- [6] <https://reader.elsevier.com/reader/sd/pii/S0022407310000531?token=06DE0CC2D63F7874883D768F>

## Propuesta de Trabajo Fin de Grado en Física

<b>Tutor/a:</b>	Daniel Pérez Ramírez
<b>Departamento y Área de Conocimiento:</b>	Física Aplicada. Física de la atmósfera
<b>Cotutor/a:</b>	Gloria Titos Vela
<b>Departamento y Área de Conocimiento:</b>	Física Aplicada. Física de la atmósfera

<b>Título del Trabajo:</b> Estudio de la distribución angular de la dispersión producida por bioaerosoles (polen y esporas).			
<b>Tipología del Trabajo:</b> (Según punto 3 de las Directrices del TFG aprobadas por Comisión Docente el 10/12/14)	(Marcar con X)	1. Revisión bibliográfica	X
		2. Estudio de casos teórico-prácticos	
		3. Trabajos experimentales	X
		4. Elaboración de nuevas prácticas de laboratorio	
		5. Elaboración de un proyecto	
		6. Trabajo relacionado con prácticas externas	

### Breve descripción del trabajo:

El aerosol atmosférico está constituido por partículas sólidas o líquidas que se encuentran suspendidas en la atmósfera. Estas partículas atmosféricas afectan el clima de forma directa, dispersando y absorbiendo la radiación solar, y también de forma indirecta ya que pueden modificar las propiedades de las nubes. Esto se debe a que las gotas de nube se forman por la activación de un subconjunto de aerosoles atmosféricos conocidos como núcleos de condensación de nubes (CCN). Varios tipos de partículas biológicas primarias como el polen han sido identificadas como potenciales CCN, lo que tendría una gran repercusión en las estimaciones de cambio climático. Conocer los patrones de dispersión del polen es esencial para entender mejor como actúan como CCN, y es aquí donde se encuentran las mayores incertidumbres actualmente. Recientemente, se han desarrollado varios instrumentos que permiten identificar y cuantificar en tiempo casi real las concentraciones y tipos polínicos, y sobre todo, sus patrones de dispersión. Estos instrumentos representan un gran avance respecto a las técnicas tradicionales de conteo de polen por microscopía. Por tanto, conocer el patrón de dispersión de dichas partículas biogénicas es de gran relevancia para mejorar los algoritmos de detección de este tipo de partículas.

### Objetivos planteados:

El principal objetivo de este trabajo será estudiar la capacidad de dispersión y su dependencia angular de diferentes especies de polen y esporas características del Parque Nacional de Sierra Nevada.

### Metodología:

Para alcanzar el objetivo propuesto, se utilizarán muestras de polen y esporas de las especies más comunes en la zona de estudio (Parque Nacional de Sierra Nevada). Con estas muestras, se creará en laboratorio una suspensión que servirá de entrada a instrumentos de medida capaces de medir tanto la cantidad de radiación dispersada como el patrón de dispersión de radiación. Nos centraremos principalmente en el rango de radiación visible. También se medirá para esta suspensión de partículas de polen la distribución de tamaño y así conocer mediante métodos indirectos el tamaño predominante de las partículas de polen. Una vez conocido el tamaño, se utilizará la teoría

matemática adecuada para reproducir los patrones de dispersión medidos en laboratorio: Si el rango de tamaño de partículas es inferior a  $1\ \mu\text{m}$ , se utilizará la teoría de Mie, mientras que para rangos de partículas superiores se utilizará una teoría más compleja conocida como T-Matrix.

Tanto la teoría de Mie como la T-Matrix se han implementado ya en distintos códigos disponibles en el Grupo de Física de la Atmósfera de la Universidad de Granada (GFAT). Se espera que el alumno se familiarice primero con ambas teorías mediante un análisis bibliográfico y posteriormente en el manejo de estos códigos. Se prevé que el alumno se familiarice también con los distintos instrumentos de medida disponibles para realizar este estudio en el GFAT.

***A rellenar sólo en el caso que el alumno sea quien realice la propuesta de TFG***

*Alumno/a propuesto/a:*

Granada, 22 de abril de 2019

