Magnitudes, unidades y dimensiones

Las magnitudes físicas son valores que se obtienen a partir de medidas de fenómenos físicos.

Para medir, es necesario comparar la magnitud con un valor unitario al que llamamos unidad física: p.e. el metro. Si decimos que una distancia es de 35m, significa que contiene 35 veces la longitud de la unidad. Por eso, es importante expresar cada medida o cada resultado de cálculos como un número y su unidad. (no significa nada decir que algo mide de largo 35).

En mecánica hay tres magnitudes fundamentales, y las demás se expresan en función de ellas: masa, longitud y tiempo (ver la definición actual del metro y el segundo).
En el Sistema Internacional (SI), hay 7 magnitudes fundamentales: además de las tres mencionadas, intensidad eléctrica, temperatura termodinámica, cantidad de sustancia e intensidad luminosa.

Conversión de unidades

Un coche circula a 120km/h. ¿Cual es su velocidad en m/s?

$$120\frac{km}{h}=120\frac{1000\,m}{3600\,s}=33.33\frac{m}{s}$$

SISTEMA MÉTRICO: UNIDADES INGENIERILES

El sistema métrico tiene múltiplos como deca, hecto, kilo, etc, pero **en ingeniería** son usuales los submúltiplos y múltiplos separados por un factor 1000.

	PREFIJO	FACTOR	EJEMPLO
múltiplos			
peta	P	10^{15}	
tera	T	10^{12}	TPa (terapascal)
giga	G	10^{9}	GW (gigavatio)
mega	M	10^{6}	MN (meganewton)
kilo	k	10^{3}	kg (kilogramo)
submúltiplos			
mili	m	10^{-3}	mA (miliamperio)
micro	µ (letra “mu”)	10^{-6}	µm (micrometro=micra)
nano	n	10^{-9}	nC (nanoamperio)
pico	p	10^{-12}	pF (picofaradio)
femto	f	10^{-15}	Fs (femto segundo)

En informática se usan potencias de 2 (aplicable a bit, byte, bit/s, etc):

$1k=2^{10}=1024$
$1M=2^{20}=1k\cdot 1k=1048576$
$1G=2^{30}=1k\cdot 1M=1073741824$
$1T=2^{40}=1M\cdot 1M$

dimensiones

Las magnitudes físicas expresadas en función de las magnitudes fundamentales nos dan las dimensiones de esa magnitud, esto es de qué forma depende de ellas, sin considerar los factores fijos.

Se expresa entre corchetes. Por ejemplo la velocidad tiene dimensiones de longitud partido por tiempo:

$[v]=L\cdot T^{-1}$

La energía cinética de una partícula de masa m y velocidad v es $E_c=\frac{1}{2}m\cdot v^2$

Sus dimensiones serán

$$[E_c]=M\cdot[L\cdot T^{-1}]^2=M\cdot L^2\cdot T^{-2}$$

La presión es la fuerza normal por unidad de superficie $p=\frac{F}{S}$

Sus dimensiones: $[p]=M\cdot L\cdot T^{-2}/L^2=M\cdot L^{-1}\cdot T^{-2}$

Cifras significativas

Si medimos la longitud de una mesa con una cinta métrica con marcas cada cm y decimos que es

$L = 2.45m$ se entiende implícitamente que está entre 2.445m y 2.255m, es decir que la incertidumbre (o cota de error) es $\pm 0.5cm = \pm 0.005m$
(en las prácticas habrá que escribir la cota de error explícitamente)

Las cifras de las que estamos seguros se conocen como **cifras significativas**, en este caso son tres. Si medimos con un metro de carpintero que aprecia mm, podemos precisar más

L=2.447m en este caso hay 4 cifras significativas

En general, si sumamos dos cantidades con diferente número de cifras significativas, el resultado no tendrá más que el sumando que menos tenga:

2.459m+ 0.0054m=2.464m

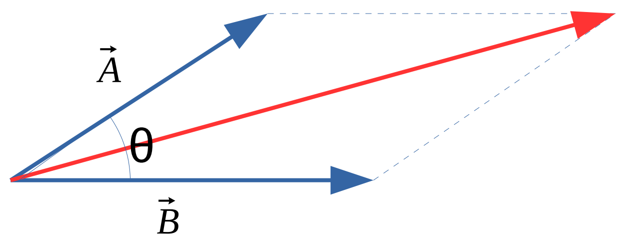
La misma regla se aplica a la multiplicación o la división: medimos con pasos el radio de un círculo y estimamos r=12m. Su área con una calculadora nos da $A=\pi r^2=452.389342m^2$, pero no tiene sentido dar tantas cifras: si solo conocemos el radio con precisión de dos cifras significativas, el área la daremos como $450m^2$ (la tercera cifra no es significativa)

En las prácticas aprenderemos cómo estimar la cota de error de una medida indirecta.

Hay magnitudes que no quedan determinadas por un valor y su unidad, sino que se necesita especificar su dirección y sentido: son las magnitudes vectoriales, como la fuerza, la velocidad o el campo eléctrico.

Los vectores se suman con la regla del paralelogramo

SUMA DE VECTORES



$\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$

propiedades

$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$ conmutativa

$(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$ asociativa

$\vec{A}+(-\vec{A})=0$ Para cada vector existe su opuesto

Por el teorema del coseno, el módulo de la suma es

$$C=|\vec{C}|=|(\vec{A}+\vec{B})|=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos(\theta)}$$

PRODUCTO DE UN VECTOR POR UN ESCALAR (se indica SIN punto):
es un vector de la misma dirección, igual sentido si el escalar es positivo y opuesto si es negativo, y módulo el del vector multiplicado por el escalar.

$$p(q\vec{A})=(pq)\vec{A}=q(p\vec{A})$$ asociativa

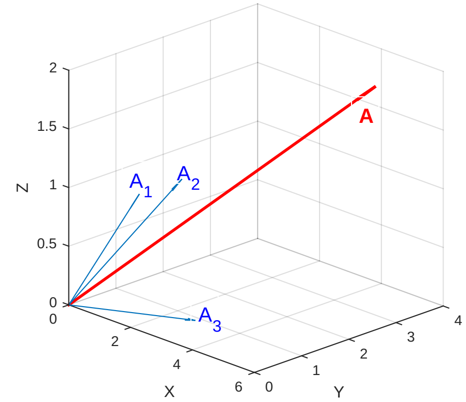
$$(p+q)\vec{A}=p\vec{A}+q\vec{A}$$

$$p(\vec{A}+\vec{B})=p\vec{A}+p\vec{B}$$

distributiva respecto de la suma

Esto permite definir un **vector unitario** (versor) en la misma dirección y sentido de A

$$\hat{e}=\frac{1}{|\vec{A}|}\vec{A} \qquad \vec{A}=A\,\hat{e}$$



COMPONENTES DE UN VECTOR
Dado un vector **A** y tres rectas concurrentes no coplanarias, siempre es posible encontrar tres vectores sobre ellas de modo que

$$\vec{A}=\vec{A}_1+\vec{A}_2+\vec{A}_3=A_1\hat{e}_1+A_2\hat{e}_2+A_3\hat{e}_3$$

Donde los **e** son los vectores unitarios en dirección de las tres rectas

$$si \quad \hat{e}_1\perp\hat{e}_2\perp\hat{e}_3$$ coinciden con los ejes cartesianos

$$\vec{A}=A_x\,\hat{i}+A_y\,\hat{j}+A_z\,\hat{k}$$

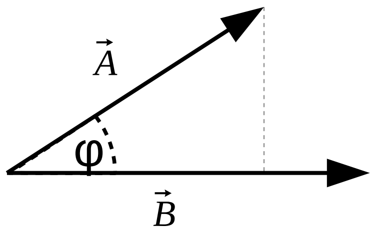
A_x, A_y y A_z son los componentes cartesianos del vector **A** y son las **proyecciones** del vector sobre cada eje. ***i***, ***j*** y ***k*** son los vectores unitarios

Por el t. Pitágoras en el espacio $$A\equiv|\vec{A}|=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$$

La suma de vectores por componentes será $\vec{A}+\vec{B}=(A_x+B_x)\hat{i}+(A_y+B_y)\hat{j}+(A_z+B_z)\hat{k}=\sum_i (A_i+B_i)\hat{e}_i$

Y el producto por un escalar $p\vec{A}=pA_x\hat{i}+pA_y\hat{j}+pA_z\hat{k}$

PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES
Es un escalar igual al producto de los módulos por el coseno del ángulo que forman



$$\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos(\varphi)$$

También puede definirse como *el producto del módulo de un vector por la proyección del otro sobre él*.
En efecto, la proyección de **A** sobre **B** es $A\cos(\varphi)$

Propiedades

$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$ conmutativa

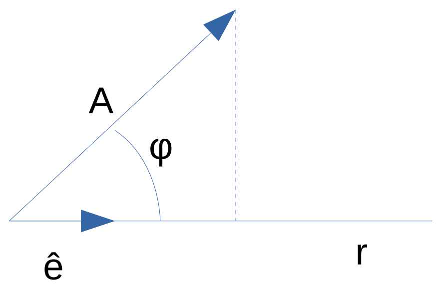
$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$ distributiva respecto de la suma

Por componentes, como $\hat{i}\cdot\hat{j}=\hat{i}\cdot\hat{k}=\hat{j}\cdot\hat{k}=0$ $\hat{i}\cdot\hat{i}=\hat{j}\cdot\hat{j}=\hat{k}\cdot\hat{k}=1$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

Si son perpendiculares, su producto escalar es nulo $\vec{A}\perp\vec{B}\Rightarrow\cos(\varphi)=0\Rightarrow\vec{A}\cdot\vec{B}=0$

El módulo puede obtenerse de $\vec{A}\cdot\vec{A}=|A|^2$

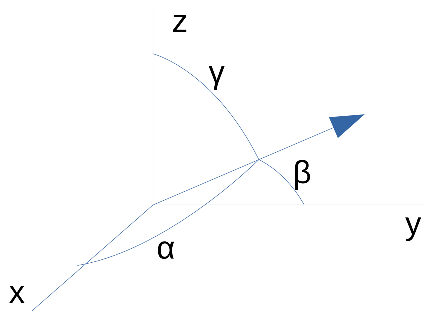


La **PROYECCIÓN** del vector **A** sobre una recta r, definida por un vector unitario **ê** en su dirección, se puede obtener como

$$Proy\, A_r = A\cos(\varphi) = \vec{A}\cdot\hat{e}$$

ÁNGULO entre dos vectores

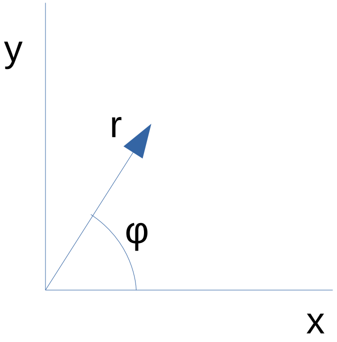
$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}$$



Cosenos directores: son los *cos* de los ángulos que forma el vector con los ejes.

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{A}\cdot\hat{i}}{A} = \hat{A}\cdot\hat{i} \qquad \cos(\beta) = \frac{\vec{A}\cdot\hat{j}}{A} = \hat{A}\cdot\hat{j} \qquad \cos(\gamma) = \frac{\vec{A}\cdot\hat{k}}{A} = \hat{A}\cdot\hat{k}$$

COORDENADAS POLARES en el plano. un punto en el plano queda determinado por su vector de posición.



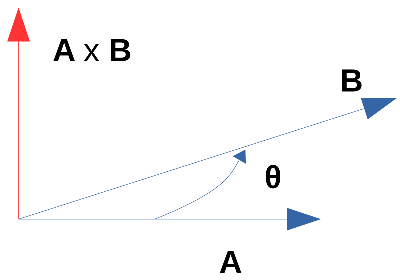
Este se puede expresar por sus componentes r_x y r_y , o bien por el módulo r y el ángulo φ con el eje X: éstas son las coordenadas polares. Las relaciones son

$$r_x = r\cos(\varphi) \qquad r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$$

$$r_y = r\sin(\varphi) \qquad \cos(\varphi) = \frac{r_x}{r}$$

PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES

Es un vector perpendicular a ambos, de módulo el producto de los módulos por el seno del ángulo que forman y sentido el que indica la regla del tornillo si se gira el primer vector hacia el segundo por el camino más corto.



$$\vec{A}\times\vec{B}=AB\sin(\theta)\hat{e}$$ Con $\hat{e}\perp\vec{A}$ y $\hat{e}\perp\vec{B}$

propiedades

$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$ anticonmutativa

$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$ distributiva respecto de la suma

$p(\vec{A}\times\vec{B})=p\vec{A}\times\vec{B}=\vec{A}\times p\vec{B}$ producto con escalar

No cumple asociativa $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\neq(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$

Teniendo en cuenta $\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=0$ $\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}$ $\hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}$ $\hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}$ $\hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k}$ $\hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$ $\hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i}$

Se puede expresar por componentes como el desarrollo de este determinante

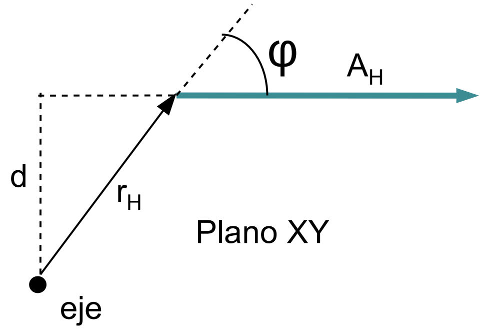
$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

Naturalmente, si dos vectores **A** y **B** son paralelos, $\vec{A}\times\vec{B}=0$

En un sistema de fuerzas coplanarias (contenidas en un plano), el momento de una fuerza A_H respecto de un eje perpendicular al plano es

$$M_E = r_H\, A_H \sin\varphi = d\, A_H$$

Es decir, el módulo del momento es el producto de la fuerza por la distancia *d* entre el eje y la recta soporte de la fuerza.



Dibujado en planta

En sistemas de **fuerzas coplanarias** los momentos respecto de un eje son escalares y les asignaremos un signo dependiendo del sentido hacia dónde tienden a hacer girar sobre el eje.

REPASO DE CINEMÁTICA

Movimiento en una dimensión $x = x(t)$

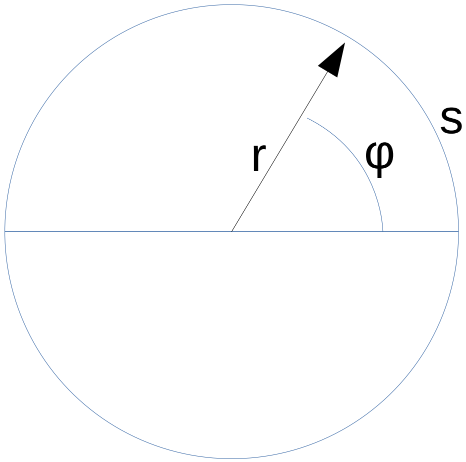
Velocidad media e instantánea $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ $v(t) = \frac{dx}{dt}$

aceleración $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$

Si v=cte, m.r.u. $x = x_0 + v \cdot t$

Si a=cte, m.r.u.a $v = v_0 + a \cdot t$ $x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$ $v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta x$

Movimiento de rotación alrededor de un eje



La longitud de arco recorrido s está ligado al ángulo φ (en radianes) como s=rφ

Velocidad angular media e instantánea

$$\omega_m=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \qquad \omega(t)=\frac{d\varphi}{dt}$$

Aceleración angular

$$\alpha=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Aceleración tangencial

$$a_t=\alpha\cdot r$$

Como la velocidad lineal cambia de dirección constantemente, aparece una componente de **aceleración normal a_n**, que vale

$$a_n=\omega^2\cdot r=\frac{v^2}{r}$$

Si ω=cte, m.c.u.

$$\varphi=\varphi_0+\omega\cdot t$$

Si α=cte, m.c.u.a

$$\omega=\omega_0+\alpha\cdot t \qquad \varphi=\varphi_0+\omega_0\cdot t+\frac{1}{2}\alpha\cdot t^2$$

Leyes de Newton

1ª- Todo cuerpo en reposo o en movimiento uniforme rectilíneo continua en reposo o con velocidad constante a menos que actúe una fuerza sobre él.

2ª- La aceleración de un cuerpo es proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa.

$$\vec{a}=\frac{\sum \vec{F}_i}{m}$$

Cuando el cuerpo es extenso (no es un punto) o es un sistema de partículas, la aceleración se refiere a la de su centro de masa.

3ª- Las fuerzas actuan siempre por pares iguales y opuestos: si el cuerpo A ejerce una fuerza $\overrightarrow{F_{AB}}$ sobre el cuerpo B, éste ejerce una igual y opuesta sobre A.

$$\overrightarrow{F_{AB}}=-\overrightarrow{F_{BA}}$$

Notad que estas fuerzas NO se cancelan, ya que están aplicadas sobre cuerpos distintos. Si consideramos el sistema formado por A+B, entonces el efecto de estas fuerzas internas es nulo sobre la aceleración del c.m.

Un sistema de referencia es **inercial** si en él se cumple la primera ley de Newton.

Por ejemplo, un autobús frenando no es un sistema inercial, porque cada pasajero “nota” una fuerza que lo acelera (la de inercia), que ES FICTICIA: no la ejerce ningún otro cuerpo ni por tanto tiene reacción. Para que se cumplan las leyes de Newton en un sistema no-inercial, hay que introducir fuerzas ficticias en él.

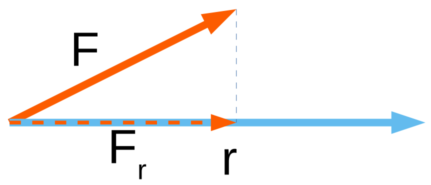
En cambio, en el sistema de referencia de la calle, un observador lo que observa es que los pasajeros del autobús tienden a seguir con la velocidad que llevaban (si no se apoyan, lo harán).

Aunque la Tierra gira y estrictamente no es un sistema inercial, se suele hablar del sistema de referencia “de laboratorio” como uno ligado al suelo, que -si despreciamos las fuerzas debidas a la rotación- puede considerarse inercial (menos durante un terremoto, claro).

Trabajo de una fuerza y energía

El trabajo W de una fuerza constante **F** aplicada sobre
una partícula que se desplaza rectilineamente una distancia **r** es

$$W=\vec{F}\cdot\vec{r}=Fr\cos(\theta)$$



Por tanto, solo la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento realiza trabajo: la componente normal al desplazamiento, no.

En general, para una fuerza variable y un desplazamiento cualquiera, el trabajo elemental es

$$dW=\vec{F}\cdot\overrightarrow{dr}$$

Para poder calcular el trabajo realizado en un desplazamiento finito, será necesario conocer el valor de **F** en función del desplazamiento **r**. En general, eso será una integral de linea. Aunque en los campos conservativos, dicha integral no depende del camino, sino sólo del punto inicial y final.

Dividiendo la expresión anterior por dt tenemos la definición de potencia P realizada por una fuerza

$$P=\frac{dW}{dt}=\vec{F}\cdot\frac{\overrightarrow{dr}}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{v}$$

Trabajo y energía cinética

Si una partícula está sometida a sólo una fuerza **F**, el trabajo de dicha fuerza se invierte en incrementar su energía cinética K

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Delta K = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

En efecto,

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int m \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot d\vec{v}$$

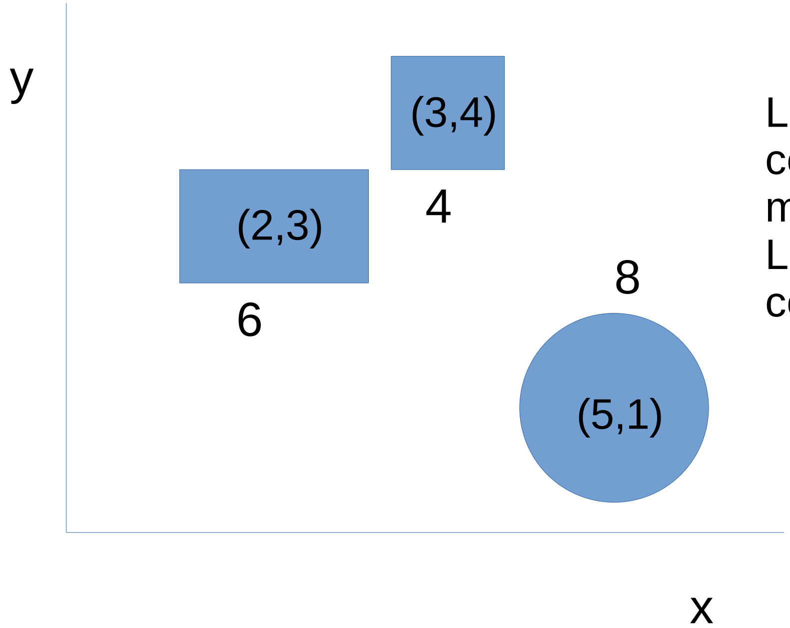
Donde v_i y v_f son, respectivamente, las velocidades inicial y final.

Centro de masa

En un sistema de partículas, si la masa de cada una es m_i y su posición es $\vec{r}_i$
La posición del centro de masas $\vec{r}_{cm}$ viene dada por

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

Par una distribución continua de masa, las sumas se expresan como integrales



Los números entre paréntesis son las coordenadas de los respectivos centros de masa y los números contiguos las masas. La posición del centro de masa del conjunto será

$$x_{cm}=\frac{2\cdot 6+3\cdot 4+5\cdot 8}{6+4+8}=3{,}56$$

$$y_{cm}=\frac{3\cdot 6+4\cdot 4+1\cdot 8}{6+4+8}=2{,}33$$

El **centro de gravedad** es el punto donde se puede considerar aplicada la resultante del peso del sistema y en la mayoría de los casos prácticos, si el valor de g (aceleración gravitatoria) se puede considerar igual en todas las partes del sistema, coincide con el c.m.

Momento lineal

El momento lineal **p** de una partícula es $\vec{p} = m\vec{v}$

Una forma equivalente de la segunda ley de Newton es $\vec{F} = \dot{\vec{p}} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt}$

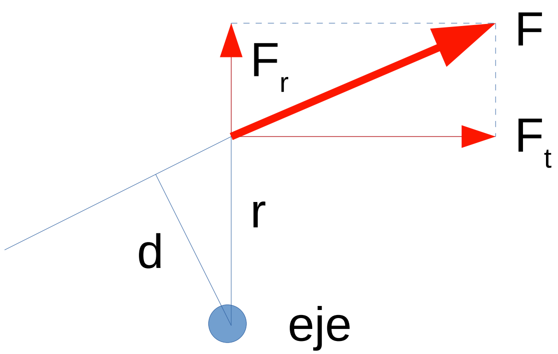
(esta es una forma más general, porque se puede aplicar a sistemas con masa variable, p.e. un cohete)

En un sistema de partículas, el momento lineal total es la suma de los de cada partícula y se conserva si la resultante de las fuerzas externas sobre el sistema es nula (la de las fuerzas internas tiene que serlo por la 3ª ley de Newton).

El movimiento del centro de masas es el que tendría una sola partícula con toda la masa del sistema y sometida a la resultante de las fuerzas externas.

Rotación de un cuerpo rígido

Si un cuerpo rígido puede girar sobre un eje, su aceleración angular es proporcional al momento de las fuerzas aplicadas respecto al eje. En este caso, se define el momento de una fuerza como el producto de ella por su brazo de palanca, que es la distancia entre la recta soporte de la fuerza y el eje.



$M = F \cdot d = F_t \cdot r$ (La componente F_r no hace momento)

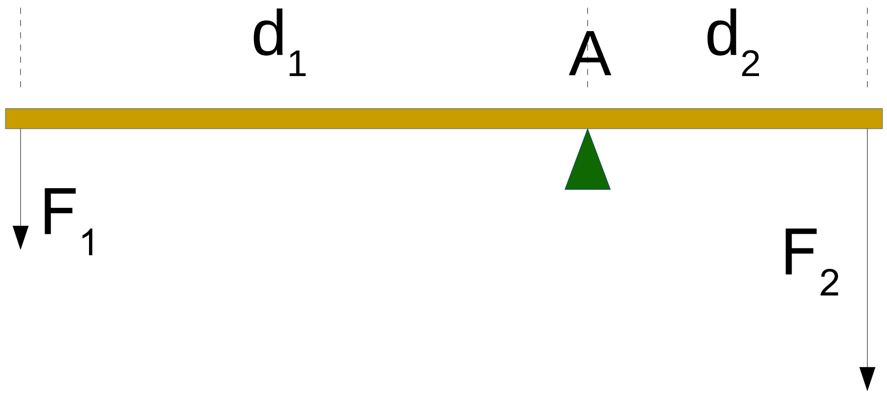
Los momentos se consideran positivos si tienden a hacer girar en sentido contrario a las agujas del reloj y negativos en caso contrario (el del dibujo).

La 2ª ley de Newton aplicada al giro de un cuerpo rígido respecto de un eje fijo es

$$\sum M_i = I\alpha$$

Donde *α* es la aceleración angular e *I* es una constante que depende de la distribución de masa respecto del eje y se llama **momento de inercia**. Es claro que si la suma de los momentos respecto del eje es nula, la aceleración angular también y el cuerpo estará en equilibrio de rotación.

Elementos de estática del sólido rígido

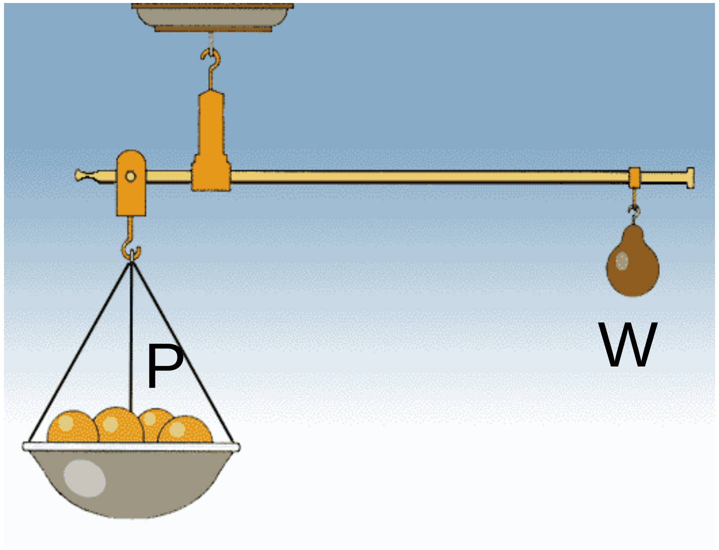


Recordemos la ley de la palanca:

$$F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2$$

Tanto las fuerzas como sus distancias al apoyo A intervienen en el equilibrio.

El producto $F_1 d_1$ es el ***momento*** de la fuerza F_1 respecto del eje que pasa por A. Lo mismo, el momento de F_2 es $F_2 d_2$. Al que tiende a hacer girar en un sentido le asignaremos un signo y al que tiende a hacer girar en sentido contrario le asignaremos signo opuesto. Así, es claro que la suma de los dos momentos (con sus signos) debe ser nula. Generalizaremos esto para cualquier número de fuerzas que no sean necesariamente paralelas.



Un ejemplo de esto es la balanza romana: el momento que hace el peso P de lo que queremos “pesar” (a la izquierda) debe ser igual pero de signo opuesto al que hace la pesa W, que deslizamos hasta que se equilibre la balanza. La posición de W nos indica directamente en una regla el valor de P.

Para que un sólido rígodo esté en equilibrio, se tiene que cumplir la condición de equilibrio de traslación de su c.m.

$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

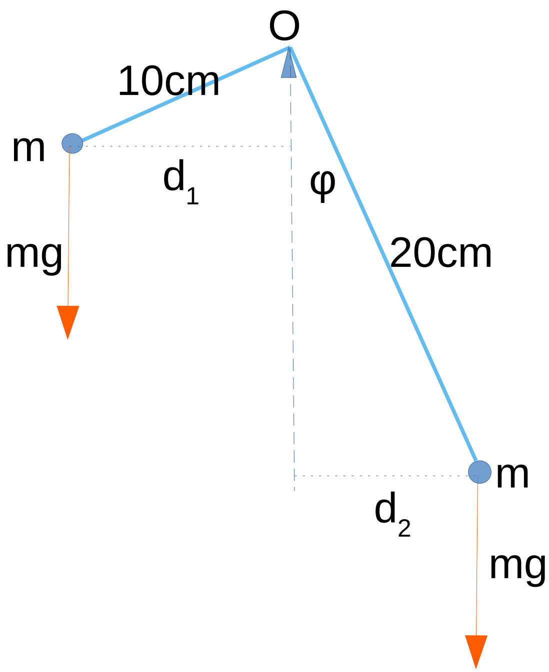
Pero además, para que esté en equilibrio de rotación, la suma de los momentos respecto de un punto origen de las fuerzas aplicadas sobre él debe ser nula:

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$$

En problemas de fuerzas coplanarias, se puede escribir esta condición como

$$\sum_i d_i \cdot F_i = 0$$

Donde los d_i son las distancias desde las rectas soporte de las fuerzas F_i al eje que se elija (se demostrará que se puede elegir cualquiera si se cumple la primera condición.).



Se trata de determinar la posición de equilibrio de este dispositivo, formado por dos bolitas de igual masa m en los extremos de dos varillas de masa despreciable que forman un ángulo recto, suspendido de su punto de unión.

Las fuerzas activas son los pesos de las bolas mg hacia abajo.
En el punto de suspensión habrá una reacción hacia arriba 2mg para que el sistema esté en equilibrio.

Tomamos momentos respecto al eje O y solo los pesos hacen momento. Los brazos de los pesos son d_1 y d_2:

$M=d_1 \cdot mg-d_2 \cdot mg=0$

Luego $d_1 = d_2$

Lo demás es geometría:

$$d_1=10\,cm \cdot cos(\varphi)$$

$$d_2=20\,cm \cdot sin(\varphi)$$

$$2 \cdot \sin(\varphi)=\cos(\varphi)$$

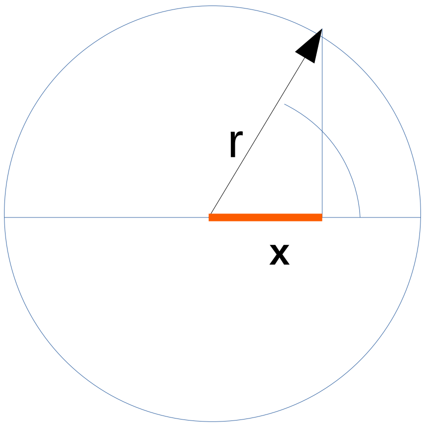
Dividiendo por cos

$$\tan(\varphi)=\frac{1}{2}$$

$$\varphi=\arctan(0.5)=26.56^0$$

Movimiento armónico simple.

Consideremos un movimiento circular uniforme de radio A.
La proyección sobre el eje X del radio que gira será



$$x = A \cdot cos(\varphi) = A \cdot cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Se dice que x describe un movimiento armónico de amplitud A, de pulsación o frecuencia angular ω y de fase inicial (cuando se empieza a contar el tiempo t) φ_0

Su periodo T es el tiempo que tarda en recorrer un ciclo (un ángulo 2π) y se puede ver fácilmente que es

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$$

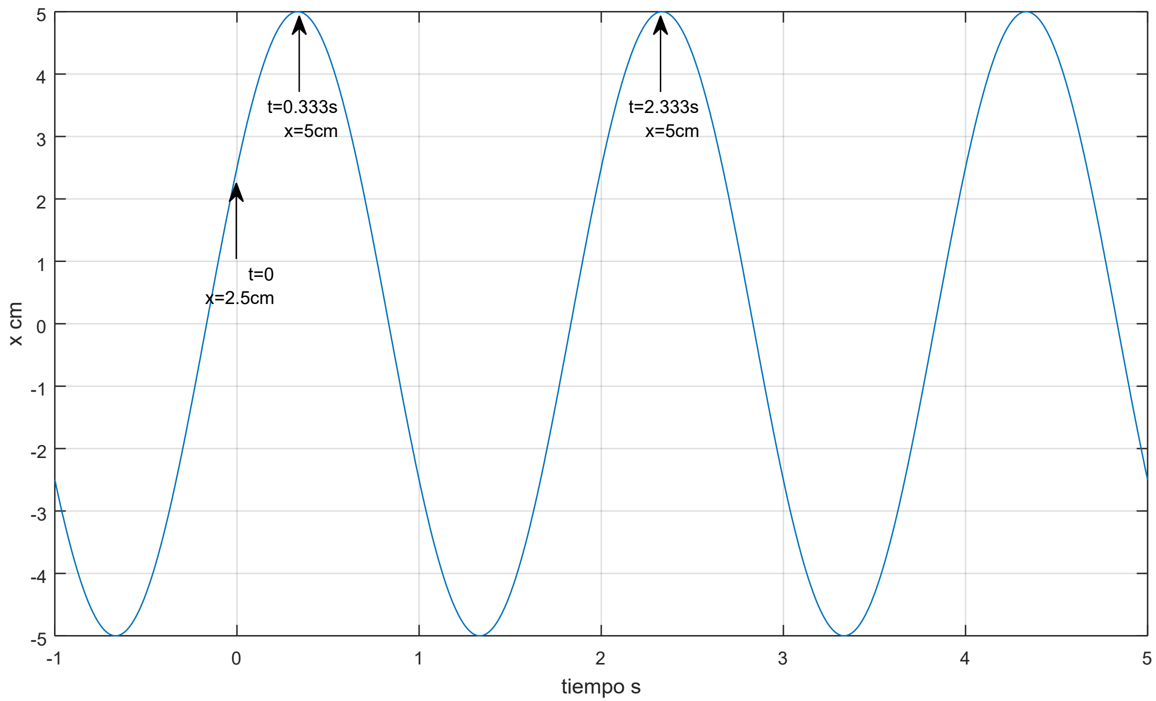
Su frecuencia f es el número de ciclos por unidad de tiempo, es decir el inverso del periodo

$$f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi}$$

También se puede expresar con un sen, en lugar de cos, ya que la proyección sobre el eje Y es el mismo movimiento, excepto por el desfase inicial. Dicho de otro modo, como

$$\cos(\theta) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \qquad x = A \cdot sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = A \cdot sin(\omega \cdot t + \varphi_0{}')$$

con $\varphi_0{}' = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}$



En esta gráfica de x frente a t **podemos medir:**

A es la x max, en este caso A=5cm

T es el periodo que tarda en repetirse, aquí

T=2.333s-0.333s=2.000s

La frecuencia será su inverso: f=0.5Hz

La frecuencia angular,

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 3.142 \frac{rad}{s}$$

Y la fase inicial es la fase (el argumento del seno) en el instante t=0,

$$x(0) = 2.5\,cm; \Rightarrow 2.5 = 5 \cdot \sin(\varphi_0) \Rightarrow \varphi_0 = \arcsin(0.5) = 30^0 = \frac{\pi}{6}$$

La velocidad y aceleración en un movimiento armónico simple también varían armónicamente

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=-A\,\omega\sin(\omega\,t+\varphi_0)$$

$$a(t)=\frac{dv}{dt}=-A\,\omega^2\cos(\omega\,t+\varphi_0)=-A\,\omega^2\cdot x$$

Los movimientos cuya aceleración es proporcional a la aceleración y con sentido contrario tienen como solución un movimiento armónico simple. Por ejemplo, una masa sometida a la fuerza elástica de un muelle (la fuerza es proporcional al desplazamiento relativo al punto de equilibrio)

$$F=-kx\;\Rightarrow\;ma=-kx\;\Rightarrow\;m\frac{d^2x}{d\,t^2}=-kx$$

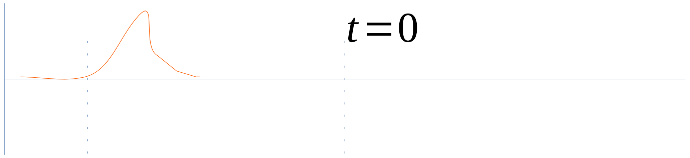
Lógicamente, los valores extremos de v y de a se alcanzan, respectivamente, cuando el seno o el coseno son ±1 y valen

$$v_{max}=A\,\omega \qquad a_{max}=A\,\omega^2$$

Ondas en una dimensión

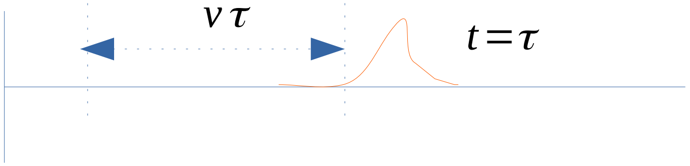
Supongamos una cuerda tensa a la que perturbamos en un punto en el instante t=0. Su forma queda descrita en ese instante por

$$y=f(x)$$



Esa perturbación se propaga a la derecha con velocidad *v* y en un tiempo t=τ la forma será

$$y=f(x-v\tau)$$



(si se propaga hacia la izquierda, sería $y=f(x+v\tau)$)

Por ejemplo, una perturbación **armónica** que en x=0 produce un movimiento

$$y(x=0,t)=A\cdot sin(\omega t)$$

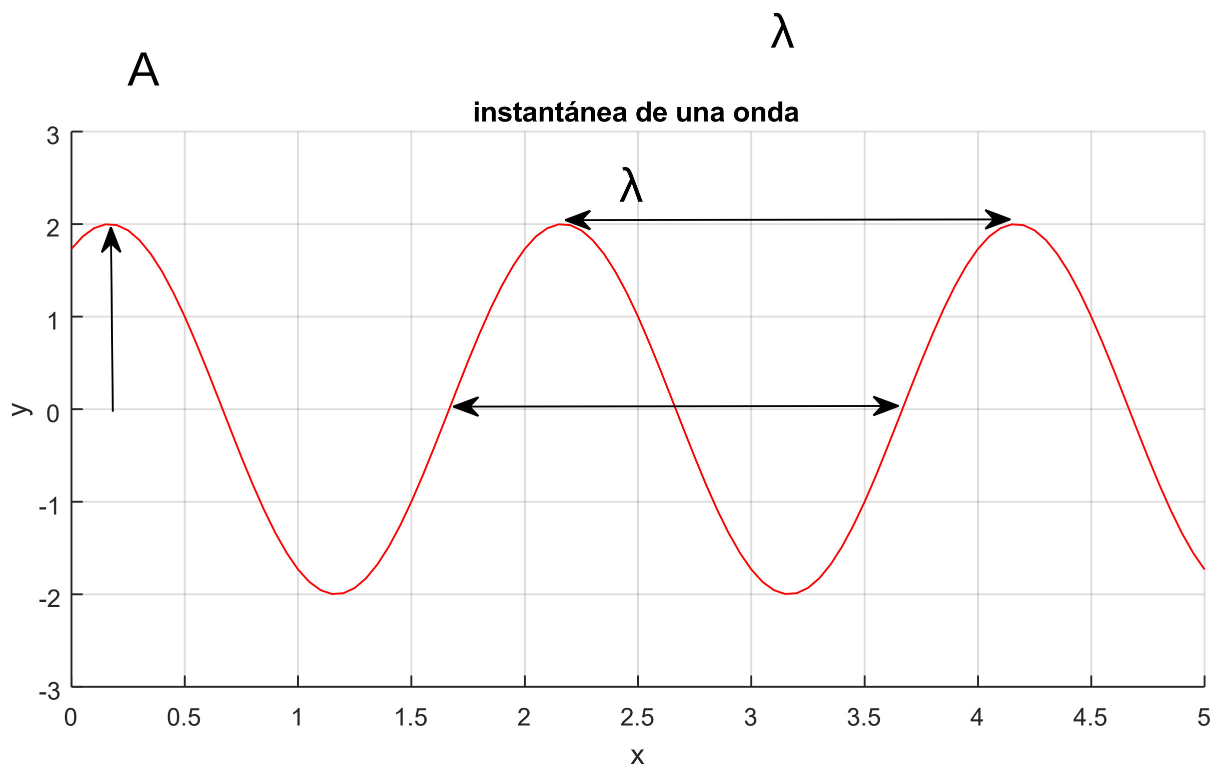
A una distancia x reproduce el movimiento retardado un tiempo $\frac{x}{v}$

Por tanto

$$y(x,t)=A\cdot sin[\omega(t-\frac{x}{v})]=A\cdot sin(\omega t-kx)$$ donde $k=\frac{\omega}{v}$ es el número de onda

La **longitud de onda** es la distancia que se propaga la onda en un periodo, es decir

$$\lambda = v \cdot T = \frac{v \cdot 2\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{k}$$



La ecuación anterior describe ondas viajeras en una dimensión.
Si nuestro sistema está ligado (p.e. una cuerda tensa sujeta por los dos extremos), se producen ondas estacionarias (modos propios) como interferencia de la onda directa y la reflejada en los extremos: Cada punto vibra con una amplitud distinta dependiente de su posición: