Integrales

1. Concepto de primitiva

Definición 1.1. Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que es $F : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una *primitiva* de f si F es derivable y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Observación.

- Todas las primitivas de una función se conocen en cuanto se conoce una. De hecho, si F es una primitiva de f, las funciones de la forma $F + C$, con $C \in \mathbb{R}$, son también primitivas de f.
- Para representar una primitiva de una función usaremos la notación siguiente: $\int f(x)\, dx$.

2. Primitivas inmediatas

Si conocemos bien las derivadas de las funciones elementales, conoceremos bien la tabla de primitivas inmediatas. En el Cuadro 1 tenemos las primitivas de las funciones usuales.

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$1/x$	$\log(\lvert x\rvert)$
a^x	$a^x/\log(a)$
e^x	e^x
$\operatorname{sen}(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\operatorname{sen}(x)$
$\tan(x)$	$-\log(\lvert\cos(x)\rvert)$
$\operatorname{senh}(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\operatorname{senh}(x)$
$\sec^2(x)$	$\tan(x)$
$\operatorname{cosec}^2(x)$	$-\operatorname{cotan}(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arc}\operatorname{sen}(x)$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arc}\cos(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$

Cuadro 1: Primitivas inmediatas

3. Cálculo de integrales

La siguiente regla se aplica para calcular la integral de una función en un intervalo de la forma $[a, b]$.

Regla de Barrow: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y G una primitiva de f. Entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)\ .$$

Ejemplo 1. Vamos a calcular la integral de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[1, 2]$.

- Calculamos una primitiva de f:

$$G(x) = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$$

- Aplicamos la Regla de Barrow:

$$\int_1^2 f(x)\,dx = G(2) - G(1) = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

3.1. Propiedades de las integrales

- La integral de una suma es la suma de las integrales; es decir,

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\ .$$

- Cuando el integrando presenta un factor común constante, el resultado es el siguiente:

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx\ .$$

4. Métodos de integración

4.1. Cambio de variable

En determinadas integrales nos interesa hacer un cambio de variable, esto es, $x = g(t)$, con el objetivo de que la nueva integral sea más sencilla de calcular. Utilizaremos entonces el siguiente resultado:

4.1 Teorema (Cambio de variable)**.** *Sea* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función derivable y con derivada*

g' continua. Sea I un intervalo tal que $\phi([a,b]) \subset I$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua con primitiva G. Entonces

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b (f(g(t))\,g'(t)\,dt = G(g(b)) - G(g(a)).$$

Ejemplo 2. Vamos a calcular

$$\int \frac{e^x + 3e^{2x}}{2+e^x}\,dx.$$

Para ello, hacemos el cambio de variable: $y = e^x$.

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x + 3e^{2x}}{2+e^x}\,dx &= \left[\begin{array}{c} y = e^x \\ dy = e^x\,dx \;\Rightarrow\; dx = \frac{dy}{y}\end{array}\right] = \int \frac{y+3y^2}{2+y}\cdot\frac{1}{y}\,dy \\ &= \int \frac{1+3y}{2+y}\,dy = \int \left(3 - \frac{5}{2+y}\right)dy \\ &= 3y - 5\log|y+2| + C = 3e^x - 5\log(e^x+2) + C.\end{aligned}$$

4.2. Integración por partes

Si u y v son dos funciones, teniendo en cuenta que $(u \cdot v)' = u \cdot v' + v \cdot u'$, obtenemos que

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx.$$

Esta fórmula aparece escrita en muchas ocasiones de la forma

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

El siguiente teorema especifica con un poco más de rigor las condiciones necesarias.

4.2 Teorema (Integración por partes)**.** *Sean $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones derivables con derivada continua. Entonces uv' y vu' son integrables en $[a,b]$ y*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx.$$

Ejemplo 3. Calcula $\int x\,e^x\,dx$.

$$\int x\,e^x\,dx = \begin{bmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = e^x\,dx, & v = e^x \end{bmatrix} = x\,e^x - \int e^x\,dx = x\,e^x - e^x = e^x(x-1).$$

4.3. Integración de funciones racionales

En este apartado vamos a estudiar el cálculo de $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, donde P y Q son funciones polinómicas. Obviamente, si el grado de P es mayor o igual que el de Q, podemos dividir los dos polinomios obteniendo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{G(x)}{Q(x)},$$

donde $H(x)$ y $G(x)$ son polinomios y el grado de G es menor que el grado de Q. Por tanto, de aquí en adelante supondremos siempre que el grado de P es menor que el grado de Q.

Estudiaremos el caso en que $Q(x)$ admite raíces reales. En este caso el denominador tiene la forma $Q(x) = (x-a_1)^{r_1}(x-a_2)^{r_2}\ldots(x-a_n)^{r_n}$, y podemos descomponer la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en fracciones simples

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \cdots + \frac{A_{r_1}}{(x-a_1)^{r_1}}$$

$$+\frac{B_1}{x-a_2}+\frac{B_2}{(x-a_2)^2}+\cdots+\frac{C_{r_n}}{(x-a_n)^{r_n}}.$$

Cada una de estas fracciones son de integración inmediata.

Ejemplo 4. Calcula $\int \frac{1}{(x-1)(x+1)^3}\,dx$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x-1)(x+1)^3} &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{D}{(x+1)^3}\\
&= \frac{A(x+1)^3+B(x-1)(x+1)^2+C(x-1)(x+1)+D(x-1)}{(x-1)(x+1)^3}\\
&= \frac{(A+B)x^3+(3A+B+C)x^2+(3A-B+D)x+A-B-C-D}{(x-1)(x+1)^3}\\
&= \frac{1}{(x-1)(x+1)^3}
\end{aligned}$$

Igualando coeficientes nos queda el sistema

$$\begin{aligned}
A+B \qquad\qquad &= 0\\
3A+B+C \qquad &= 0\\
3A-B \qquad +D &= 0\\
A-B-C-D &= 1
\end{aligned}$$

que tiene como soluciones $A = 1/8$, $B = -1/8$, $C = -1/4$ y $D = -1/2$. La integral queda

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)^3} &= \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^3} \\ &= \frac{1}{8}\log|x-1| - \frac{1}{8}\log|x+1| + \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{4(x+1)^2}.\end{aligned}$$

5. Ejercicios

Ejercicio 1. Calcula una primitiva de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 7x + 1$,

b) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$,

c) $f(x) = 5\sqrt{x}$,

d) $f(x) = (8x-3)(4x^2-3x+8)^{10}$,

e) $f(x) = (x^2-1)(x^3-3x+5)^{1/2}$,

f) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$.

Ejercicio 2. Calcula una primitiva de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+4}$,

b) $f(x) = \frac{\log(x)}{x}$,

c) $f(x) = (x^2-1)\,e^{x^3-3x+5}$,

d) $f(x) = \frac{2^{1/x}}{x^2}$,

e) $f(x) = x\,e^{x^2}$,

f) $f(x) = x^3\,\sqrt{x^4+1}$.

Ejercicio 3. Calcula una primitiva de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \log(5x)$,

b) $f(x) = x\,e^x$,

c) $f(x) = \arctan(x)$,

d) $f(x) = \operatorname{sen}(x)\,e^x$,

e) $f(x) = x\log(x)$,

f) $f(x) = x^2\,e^{-x}$.

Ejercicio 4. Calcula una primitiva de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x-3}$,

b) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$,

c) $f(x) = \frac{x-1}{x^3-4x^2+5x-2}$,

d) $f(x) = \frac{x^2+2}{x^3-3x-2}$,

e) $f(x) = \frac{x-1}{x^4-4x^3}$,

f) $f(x) = \frac{x}{x^3-3x^2+3x-1}$.

Ejercicio 5. Calcula las integrales siguientes:

a) $\int_1^2 \frac{\log(x)}{x}, dx$,

b) $\int_0^1 \operatorname{arc\,sen}(x)\, dx$,

c) $\int_1^\pi \operatorname{sen}(x)\, e^x\, dx$,

d) $\int_2^3 \frac{x}{x^3-3x^2+3x-1}\, dx$,

e) $\int_1^{2/5} \log(5x)\, dx$,

f) $\int_0^1 x^3 \sqrt{x^4+1}\, dx$.