Integrales

Instrucciones. Presiona "Inicio del Test" para empezar a rellenar el test y "Final del Test" para conocer tu puntuación. Después de esto puedes utilizar el botón "Correctas" para conocer las respuestas correctas.

Inicio del Test Responder a las siguientes cuestiones

1. Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$$

(a) Una primitiva de f es $\frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 + 5x + 7$.

☐ Verdadero ☐ Falso

(b) La primitiva anterior pasa por el punto $(0, 5)$.

☐ Verdadero ☐ Falso

(c) La integral de f en $[0, 1]$ vale $\frac{125}{35}$.

☐ Verdadero ☐ Falso

(d) $\int_1^0 f(x)\,dx = -\frac{58}{15}$.

☐ Verdadero ☐ Falso

2. Sea $f(x) = \text{sen}(2x)$:

(a) Una primitiva de f es:

☐ $\frac{-\cos(2x)}{2}$ ☐ $\cos(2x)$ ☐ $\frac{\cos(2x)}{2}$

(b) La integral de f en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ es:

☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 0 ☐ 1

3. La integral $\int_1^2 x\,\log(x)\,dx$ vale :

☐ $\frac{1}{4}$ ☐ 0 ☐ $2\,\log(2) - \frac{3}{4}$

4. Sea $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$.

(a) Una primitiva de f es

☐ $x - \arctan(x)$ ☐ $log(x^2 + 1)$ ☐ $\arctan(x)$

(b) La integral de f en $[0, 1]$ es

☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{\pi}{4}$ ☐ $-\frac{\pi-4}{4}$

5. Sea $f(x) = \frac{4}{x^2-1}$.

(a) Una primitiva de f es

☐ $\log\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)$ ☐ $2\,(\log|x-1| - \log|x+1|)$

(b) La integral de f en $[0, 1/2]$ es

☐ $-\log(9)$ ☐ $-1/2$ ☐ $1/2$

Final del Test | Puntos: | Correctas

Soluciones a los Tests

Solución al Test: Sabemos que $\int f(x)\,dx = \frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 + 5x + C$. Por tanto, para $C = 7$ la función dada es una primitiva de f.

Final del Test

Solución al Test: La primitiva anterior, $F(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 + 5x +$ verifica que $F(0) = 7$. Por tanto, no es cierto que pase por $(0, 5)$.

Final del Test

Solución al Test: Aplicando la regla de Barrow, $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{58}{15} \neq \frac{125}{35}$.

Final del Test

Solución al Test: Es cierto ya que $\int_1^0 f(x)\,dx = -\int_0^1 f(x)\,dx = -\frac{58}{15}$.

Final del Test

Solución al Test: Sabemos que $\int f(x)\,dx = \frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 + 5x + C$. Por tanto, para $C = 7$ la función dada es una primitiva de f.

Final del Test

Solución al Test: Utilizando el método del cambio de variable:

$$\int_0^{\pi/2} \mathsf{sen}(2x)\,dx = \begin{bmatrix} y = 2x \\ dy = 2\,dx \;\Rightarrow\; dx = \frac{dy}{2} \\ x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = \pi/2 \Rightarrow y = \pi \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \mathsf{sen}(y)\,dy = \frac{1}{2}\Big[-\cos(y)\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{2}(1-1) = 0\ .$$

Final del Test

Solución al Test: Utilizando el método del integración por partes:

$$\int_1^2 x\,\log(x)\,dx = \begin{bmatrix} u = \log(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x}\,dx \\ dv = x\,dx \;\Rightarrow\; v = \frac{x^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\log(x)\,\frac{x^2}{2}\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx$$

$$= 2\,\log(2) - \frac{3}{4}$$

Final del Test

Solución al Test: Se trata de una integral de tipo racional.

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \int dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$
$$= x - \arctan(x)$$

Final del Test

Solución al Test:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \Big[x - \arctan(x)\Big]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi - 4}{4}$$

Final del Test

Solución al Test: Factorizamos el polinomio denominador:$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Y descomponemos el integrando en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{x^2-1}$$
$$\Rightarrow 1 = A(x+1) + B(x-1)$$

Dando a x el valor 1, obtenemos que $A = 1/2$ y dando el valor $x = -1$, deducimos que $B = -1/2$. Por tanto,

$$\int \frac{4}{x^2-1}\,dx = 4\int \frac{1/2}{x-1}\,dx + 4\int \frac{-1/2}{x+1}\,dx$$
$$= 2\left(\log|x-1| - \log|x+1|\right)$$

Final del Test

Solución al Test:

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \frac{4}{x^2-1}\,dx &= 2\Big[\log|x-1| - \log|x+1|\Big]_0^{1/2} \\ &= 2\left(-\log(2) - \log(3) + \log(2)\right) \\ &= -2\log(3) = -\log(9)\end{aligned}$$

Final del Test