# Límites y continuidad

## 1. Continuidad

Una función $f$ es *continua* en un punto $a$ de su dominio si se cumple que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Las funciones elementales que hemos visto en la sesión anterior son continuas. Por tanto, se tiene que

$$\lim_{x \to -1} \left(x^2 - x + 1\right) = 3, \quad \lim_{x \to 0} \cos(x) = 1, \quad \lim_{x \to e^2} \log(x) = 2.$$

Además, la suma, producto y composición de funciones continuas da como resultado una función continua. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2 + \log(x)$ es continua, con lo que,

$$\lim_{x \to e^2} x^2 + \log(x) = e^4 + 2.$$

# 2. Cálculo de límites

## 2.1. Límites laterales

Hay veces en las que el cálculo del límite en un punto $a$ depende de la posición, a la izquierda o a la derecha, de los puntos que tomemos acercándose a $a$. Esta situación, por ejemplo, se presenta en los puntos que dividen las partes de una función definida a trozos.

**Ejemplo 1.** Consideremos la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{si } x \leq 0 \\ e^x, & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \operatorname{sen}(\pi x), & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Vamos a calcular el límite de la función dada en los puntos “conflictivos"; esto es, en los puntos donde la expresión de $f$ cambia. En este caso son $x = 0$, y $x = 1$. Como a ambos lados de cada uno de estos puntos la expresión de la función es distinta, nos vemos obligados a calcular los límites laterales para decidir si la función $f$ tiene límite en ellos.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 + 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$$

Dada la coincidencia de ambos límites laterales, concluimos que la función dada sí tiene límite en el punto 0 y vale 1; es decir $\exists \lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Como, además, este límite coincide con el valor de $f(0) = 1$, podemos concluir que la función $f$ es continua en el punto 0.

Por otra parte:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} e^x = e^1 = e$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} \operatorname{sen}(\pi x) = \operatorname{sen}(\pi) = 0$$

Como ambos límites laterales son distintos, concluimos ahora que la función $f$ no tiene límite en el punto 1; es decir $\nexists \lim_{x\to 1} f(x)$. Por tanto, esta función $f$ no es continua en el punto 1; de hecho, $f$ presenta una "discontinuidad de salto".

Nuestra intención con el siguiente ejemplo es destacar que hay funciones que "aparentemente" no son funciones a trozos, pero que en realidad sí lo son. Esto es importante tenerlo en cuenta a la hora de calcular algunos límites.

**Ejemplo 2.** Estudiemos la existencia de $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$. Recordemos que la función valor absoluto no es más que un ejemplo de función a trozos:

$$|x| = \begin{cases} x & , \text{si } \; x \geq 0 \\ -x & , \text{si } \; x < 0 \end{cases}$$

El límite, entonces, que nos piden requiere el cálculo de los límites laterales.

$$\lim_{x\to 0_-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}} = -1$$
$$\lim_{x\to 0_+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1$$

Por tanto, $\nexists \lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$.

# 3. Indeterminaciones

## 3.1. Infinito dividido por infinito

El procedimiento para resolver esta indeterminación no es único; depende del tipo de función que la presente. Con los siguientes ejemplos, estableceremos cómo actuar ante límites similares.

**Ejemplo 3.** Vamos a resolver tres tipos de límites que presentan la característica común de ser cocientes de funciones polinómicas. Es decir, vamos a estudiar límites de funciones racionales cuando la variable tiende a infinito. Veremos que la forma de actuar, para evitar la indeterminación, en todos ellos es siempre la misma: dividir en el numerador y en el denominador por la máxima potencia que aparezca en la expresión.

i) Si el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, el resultado del límite será, dependiendo de los coeficientes, $+\infty$ o $-\infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2x^2+5}{3x^2-x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}-\frac{2x^2}{x^3}+\frac{5}{x^3}}{\frac{3x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^3}}{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}\end{aligned}$$

con lo que el numerador tiende a uno y el denominador a cero y el límite que buscamos es $+\infty$.

ii) Si el numerador y el denominador tienen el mismo grado, el límite será el cociente de los coeficientes líderes. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2-2x}{7x^2+x+1} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{5x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}}{\frac{7x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{5-\frac{2}{x}}{7+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{5}{7}.\end{aligned}$$

iii) Si el grado del denominador es mayor que el grado del numerador, el límite nos saldrá cero.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+3}{x^5+2x+1} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2}{x^5}+\frac{3}{x^5}}{\frac{x^5}{x^5}+\frac{2x}{x^5}+\frac{1}{x^5}} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^5}}{1+\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^5}} = 0.\end{aligned}$$

## 3.2. Cero dividido por cero

Si el límite de un cociente de polinomios presenta una indeterminación de la forma cero partido por cero eso quiere decir que ambos polinomios son divisibles por $(x-a)$, donde $a$ es el punto donde estamos calculando el límite. Simplificando dicho factor, tantas veces como sea necesario, eliminamos la indeterminación.

**Ejemplo 4.**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{x^4-5x^3+3x^2+9x}{x^3-7x^2+16x-12} &= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^3-2x^2-3x)}{(x-3)(x^2-4x+4)}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{x^3-2x^2-3x}{x^2-4x+4}=\frac{0}{1}=0.\end{aligned}$$

## 3.3. Infinito menos infinito

Un ejemplo usual de indeterminación de este tipo se presenta cuando tenemos una diferencia de funciones que no se pueden simplificar o cancelar directamente. En el ejemplo que tenemos a continuación vamos a usar las identidades notables que hemos visto, en concreto que suma por diferencia es diferencia de cuadrados, para eliminar raíces multiplicando y dividiendo por, lo que se suele llamar, el *conjugado*.

**Ejemplo 5.**

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)\cdot\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x+2-(x-2)}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)} = 0
\end{aligned}$$

## 3.4. Cero por infinito

El producto de funciones se puede escribir como un cociente usando que

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}.$$

Si tenemos una indeterminación de la forma “cero por infinito” y aplicamos el truco anterior, dependiendo de qué factor pasemos al denominador, obtenemos una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

Por ejemplo, el cálculo del límite siguiente

$$\lim_{x\to 0} x\log(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1/\log(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(x)}{1/x}$$

lo podemos ver de cualquiera de las tres formas anteriores. En la primera tenemos una indeterminación $0\cdot\infty$, en la segunda tenemos una indeterminación $\frac{0}{0}$ y la última es $\frac{\infty}{\infty}$.

## 3.5. Cero elevado a cero, infinito elevado a cero, uno elevado a infinito

Las indeterminaciones en las que aparecen funciones elevadas a funciones siempre se pueden pasar a productos o cocientes utilizando logaritmos y exponenciales. Recordemos que la función exponencial y logaritmo son inversas una de la otra o, lo que es lo mismo, que

$$e^{\log(x)} = x \quad \text{y} \quad \log(e^x) = x.$$

Usando esto, si tenemos un par de funciones $f(x)$ y $g(x)$, entonces, usando que el exponente de la función dentro del logaritmo sale multiplicando,

$$f(x)^{g(x)} = e^{\log\left(f(x)^{g(x)}\right)} = e^{g(x)\log(f(x))}$$

Resumiendo, hemos cambiado el problema de estudiar $f(x)^{g(x)}$ por el de $g(x)\log(f(x))$.

**Ejemplo 6.** El cálculo del límite de $x^x$, cuando $x$ tiende a cero, pasa por resolver una indeterminación de la forma $0^0$. Utilizando exponenciales y logaritmos

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{\log(x^x)} = \lim_{x\to 0} e^{x\log(x)}$$

pasamos a estudiar $\lim_{x\to 0} x\log(x)$. El cálculo de este último lo veremos en la asignatura Cálculo.

# 4. Asíntotas

## 4.1. Asíntota vertical

Una función $f$ tiene a la recta $x = a$ como asíntota vertical si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty.$$

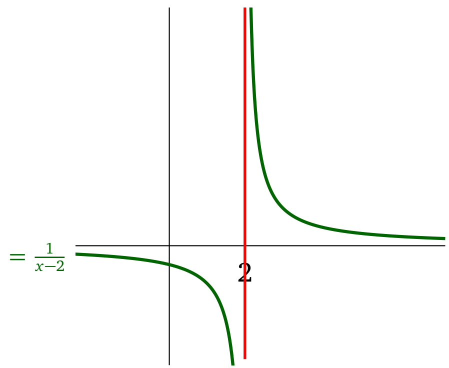



Figura 1: La función $\frac{1}{x-2}$ tiene una asíntota vertical en $x = 2$

**Ejemplo 7.** La función $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ tiene dos asíntotas verticales: $x = 1$ y $x = -1$ que son los dos valores que anulan al denominador, ya que

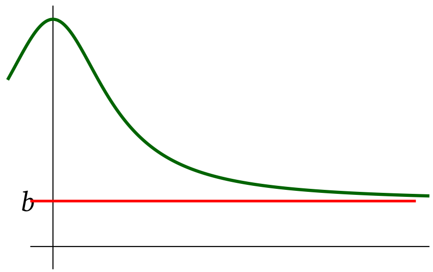
$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = +\infty.$$

¿Cuál es valor de los otros dos límites laterales?

## 4.2. Asíntota horizontal

Una función $f$ tiene a la recta $y = b$ como asíntota horizontal si

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \quad \text{o} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$



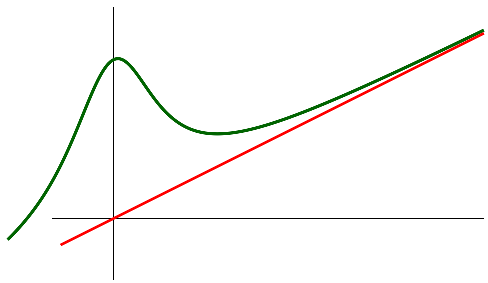

**Ejemplo 8.** La función $f(x) = \frac{3x^2+2x+1}{x^2-x+5}$ tiene a la recta $y = 3$ como asíntota horizontal ya que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^2 - x + 5} = 3.$$

## 4.3. Asíntota oblicua

Una función $f$ tiene a la recta $y = mx + n$ como asíntota oblicua ($m \neq 0$) si

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(mx+n)) = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{x\to-\infty}(f(x)-(mx+n)) = 0.$$



Para calcular los valores $m$ y $n$ hacemos lo siguiente:

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad n = \lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)$$

**Ejemplo 9.** Veamos si la función $f(x) = \frac{3x^3+1}{x^2+1}$ tiene asíntotas oblicuas. En primer lugar calculamos el posible valor de $m$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x+1}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3+1}{x^3+x} = 3.$$

En segundo lugar, calculamos el valor de $n$:

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \left( \frac{3x^3+1}{x^2+1} - 3x \right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3+1-3x^3-3x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-3x}{x^2+1} = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, la recta $y = 3x$ es una asíntota oblicua de $f$.

# 5. Ejercicios

**Ejercicio 1.** Estudia la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si } x < 0 \\ \cos(x), & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

**Ejercicio 2.** Estudia la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + x, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

**Ejercicio 3.** Calcula los siguientes límites

1. $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 4x}$
2. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x^6 + 2x^4 - x^3}{x^4 - 5x^2}$
3. $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 1}$

**Ejercicio 4.** Calcula los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{x^2+1}{3x}-\dfrac{2x^3}{x^2+2}\right)$

**Ejercicio 5.** Calcula los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^3-2x+1}{x^3+10x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{7x-8}{4-5x^2}$

**Ejercicio 6.** Calcula los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+3}{x\sqrt{x+1}-x\sqrt{x-1}}$

**Ejercicio 7.** Estudia las asíntotas de las siguientes funciones

1. $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-2}$
2. $f(x)=x+\dfrac{3}{x}$
3. $f(x)=x^2+\dfrac{2x}{x^2+1}$