Teoría de conjuntos

1. Teoría de conjuntos: definiciones básicas

Un **conjunto** es una colección de objetos bien definidos y diferenciables entre sí que se llaman **elementos**. Al conjunto que no tiene elementos se le denomina conjunto vacío ϕ. Si un conjunto A es finito (tiene un número finito de elementos), entonces a ese número de elementos se les denomina **cardinal de A**, $|A|$.
Sea un conjunto formado por cuatro elementos, es decir, $|A| = 4$. Por ejemplo $A = \{a, b, c, d\}$ de forma que $a \in A$ y $z \notin A$.

En la mayoría de las ocaciones, se consideran conjuntos que pertenecen o son subconjuntos de otro denominado **conjunto universal**, U y se suelen representar en diagramas de Venn. Se dice que A es un subconjunto de B, $A \subseteq B$, si todos los elementos de A también pertenecen a B, es decir, $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$.

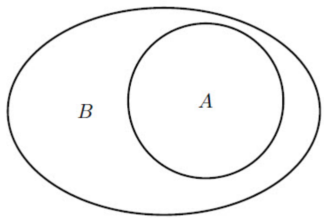

Figure 1: Inclusión: $A \in B$

Al conjunto formado por todos los subconjuntos de A, se le denomina **partes de A**, $\mathbb{P}(A)$. El cardinal de $\mathbb{P}(A)$, $|\mathbb{P}(A)|$ se puede hallar:

$$|\mathbb{P}(A)| = 2^{|A|}$$

Por ejemplo, consideremos el conjunto A=”resultados pares en el lanzamiento de un dado”$=\{2,4,6\}$, entonces las partes de A son:

$$\mathbb{P}(A) = \{\phi, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2,4\}, \{2,6\}, \{4,6\}, A\}$$

y por tanto,$|\mathbb{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^3 = 8$.

2. Operaciones con conjuntos

2.1. Complementación

Sea U el conjunto universal y un subconjunto del mismo, A. Se define el complementario de A, $\overline{A}$, como el conjunto formado por todos los elementos de U que no pertenecen a A, es decir $\overline{A} = \{x \in U / x \notin A\}$. Por definición se verifica que $\overline{\phi} = U$ y $\overline{U} = \phi$.

Por ejemplo, si consideramos como conjunto universal, el conjunto de todos los resultados posibles en el lanzamiento de un dado y A$=\{2,4,6\}$, su complementario es $\overline{A} = \{1,3,5\}$.

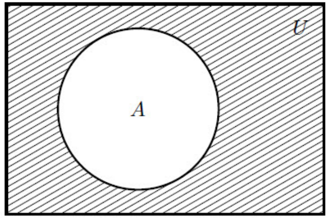

Figure 2: Complementación: $\overline{A}$

2.2. Unión

Sean A y B dos conjuntos. El conjunto unión, $A \cup B$ es el conjunto formado por los elementos de A o de B, es decir, $A \cup B = \{x/x \in A \text{ ó } x \in B\}$. Las propiedades más importantes de la unión de conjuntos son:

$$\begin{cases} Idempotente, & A \cup A = A \\ Commutativa, & A \cup B = B \cup A \\ Asociativa, & (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \end{cases}$$

2.3. Intersección

La intersección de dos conjuntos A y B, $A \cap B$ es otro conjunto formado por los elementos que están en A y en B simultáneamente, es decir, $A \cap B = \{x/x \in A$ y

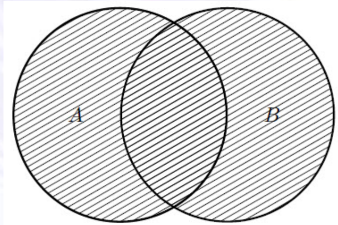

Figure 3: Unión: $A \cup B$

$x \in B\}$. Si $A \cap B = \phi$, se dice que los conjuntos son disjuntos. Las propiedades más importantes de la intersección de conjuntos son:

$$\begin{cases} Idempotente, & A \cap A = A \\ Commutativa, & A \cap B = B \cap A \\ Asociativa, & (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{cases}$$

2.4. Diferencia

La diferencia de dos conjuntos A y B, $A - B$ es el conjunto formado por todos los elementos de A que no están en B, es decir, $A - B = \{x/x \in A \text{ y } x \notin B\}$. En este caso, puede comprobarse gráficamente que $A - B = A \cap \overline{B}$.

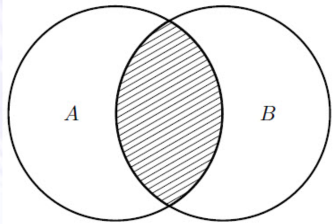

Figure 4: Intersección: $A \cap B$

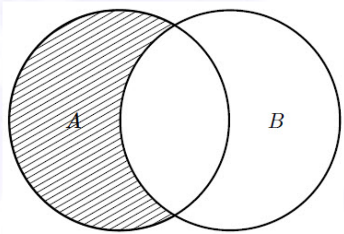

Figure 5: Diferencia: $A - B$

2.5. Diferencia simétrica

La diferencia simétrica de A y B, $A \triangle B$ es el conjunto formado por la unión de los elementos de A que no están en B y los elementos de B que no están en A, es decir, $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$.

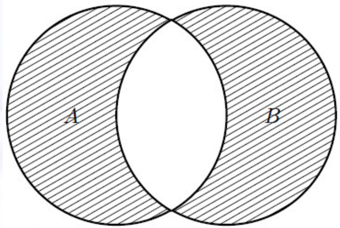

Figure 6: Diferencia simétrica: $A \triangle B$

Ejercicio propuesto: Dado el conjunto universal formado por todos los números naturales menores o iguales a 10 y dados los conjuntos A=”números naturales pares menores o iguales a 10” y B=”números naturales menores o iguales a 5”:

1. Dibuje los conjuntos anteriores en un diagrama de Venn.
2. Obtenga el complementario de A.
3. Obtenga el conjunto intersección y unión de A y B.

4. Obtenga el conjunto diferencia y diferencia simétrica de A y B.

2.6. Producto cartesiano

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B, $A \times B$ es el conjunto formado por pares de elementos ordenados, de forma que el primer elemento del par pertenece a A y el segundo elemento del par pertenece a B, es decir, $A \times B = \{(a, b)/a \in A$ y $b \in B\}$. En muchas ocasiones se suele representar el producto cartesiano en un diagrama de coordenadas cartesianas.

Por ejemplo, si tenemos $A = \{1, 2, 3)\}$ y $B = \{a, b)\}$, entonces su producto cartesiano es $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$.

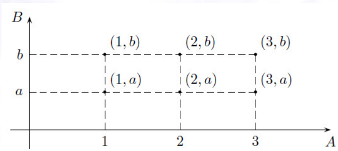

Figure 7: Diagrama de coordenadas cartesianas: $A \times B$

Las propiedades más importantes del producto cartesiano son:

$$\begin{cases} A \times B \neq B \times A \\ A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \\ A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \end{cases}$$

Es importante advertir que el producto cartesiano se puede generalizar al caso de n conjuntos:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n)/a_i \in A_i, \forall i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Por ejemplo, el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$, es el producto cartesiano de tres conjuntos $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

3. Relaciones entre conjuntos

Una relación $\mathcal{R}$ es un subconjunto del producto cartesiano de A y B, siendo A el conjunto inicial y B el conjunto final. Cuando la relación se realiza en $A \times A$ se dice que es una relación binaria.

Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$, entonces su producto cartesiano es $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$. Considerando esto, una relación podría ser $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, b)\}$ y por tanto, $1\mathcal{R}a$ y $2\mathcal{R}b$.

Otro ejemplo de relación (binaria), considerando el producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

podría definirse como:

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / 2x^2 + 10y^2 = 25\right\}$$

cuyos elementos serán los puntos del sistema de coordenadas que se encuentran en la elipse.

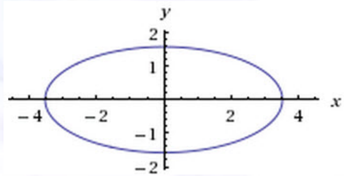

Figure 8: La relación $\mathcal{R}$ define una elipse

3.1. Relación de orden

Se denomina relación de orden, $\preceq$, en un conjunto A a una relación binaria en A cuyos elementos verifican las propiedades:

$$\begin{cases} \text{Reflexiva,} & a \preceq a \\ \text{Antisimétrica,} & \text{Si } a_1 \preceq a_2 \text{ y } a_2 \preceq a_1 \Rightarrow a_1 = a_2 \\ \text{Transitiva,} & \text{Si } a_1 \preceq a_2 \text{ y } a_2 \preceq a_3 \Rightarrow a_1 \preceq a_3 \end{cases}$$

En particular, la relación "$\leq$" dentro de los conjuntos de números naturales $\mathbb{N}$, enteros $\mathbb{Z}$, racionales $\mathbb{Q}$ o reales $\mathbb{R}$ es una relación de orden. En la figura podemos ver cómo por ejemplo $a \preceq b$, $b \preceq d$, $a \preceq d$, etc.

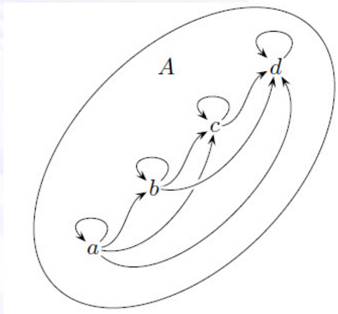

Figure 9: Relación de orden

3.2. Relación de equivalencia

Se denomina relación de equivalencia $\mathcal{R}$ en un conjunto A, a una relación binaria en A cuyos elementos verifican las siguientes propiedades:

$$\begin{cases} \text{Reflexiva,} & a\mathcal{R}a \\ \text{Simétrica,} & \text{Si } a_1\mathcal{R}a_2 \Rightarrow a_2\mathcal{R}a_1 \\ \text{Transitiva,} & \text{Si } a_1\mathcal{R}a_2 \text{ y } a_2\mathcal{R}a_3 \Rightarrow a_1\mathcal{R}a_3 \end{cases}$$

Como ejemplo podemos considerar en $\mathbb{Z}$ la relación "a-b es múltiplo de 2". Esta relación es una relación de equivalencia. Considerando solamente B=$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ esta relación de equivalencia se puede representar como aparece en la figura. Por ejemplo $4\mathcal{R}8$, $6\mathcal{R}8$, $8\mathcal{R}6$, etc.

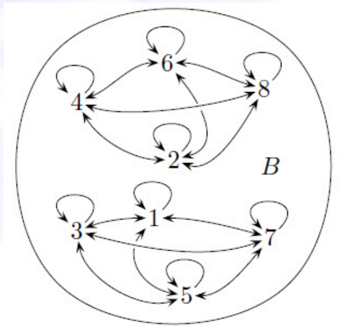

Figure 10: Relación de equivalencia

Al conjunto de elementos de A que están relacionados con a mediante la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ se le denomina clase de equivalencia en a, $\mathcal{C}(a)$. Por ejemplo, la clase de equivalencia del número 4 es $\mathcal{C}(4) = \{2, 4, 6, 8\}$ y por tanto, vemos como los elementos que están relacionados entre sí, generan la misma clase de equivalencia. Además, esta clase de equivalencia no puede tener elementos comunes a la clase $\mathcal{C}(7)$ pues son distintas.