



## Propuesta de Trabajo Fin de Grado en Estadística (curso 2020-2021)

*Responsable de tutorización:* Manuel Díaz Carrillo

*Departamento:* Análisis Matemático

*Área de conocimiento:* Análisis Matemático

*Responsable de cotutorización:*

*Departamento:*

*Área de conocimiento:*

*(Rellenar sólo en caso de que la propuesta esté realizada a través de un estudiante)*

*Estudiante que propone el trabajo:*

*Título del trabajo:*

**Título del trabajo: Medidas doblemente estocásticas, operadores de Markov y Cópulas.**

*Tipología del trabajo (marcar una o varias de las siguientes casillas):*

Complementario de profundización

Divulgación de las Matemáticas

Docencia e innovación

Herramientas informáticas

Iniciación a la investigación

*Materias del grado relacionadas con el trabajo:*

Análisis Matemático, Análisis Funcional, Teoría de la Medida y de la Probabilidad.

*Descripción y resumen de contenidos:*

Si  $I$  es el intervalo unidad y  $m$  la medida de Lebesgue en  $I$ , una medida de probabilidad  $p$  en  $I \times I$  se dice doblemente estocástica si  $p(A \times I) = p(I \times A) = m(A)$  para todo subconjunto de Borel  $A$  de  $I$ .

Un operador de Markov  $T$  es un operador lineal positivo en el espacio de Hilbert real  $L_2$ , tal que  $T1 = T^*1 = 1$ . Existe una biyección entre el conjunto  $M$  de todas las **medidas doblemente estocásticas** y el conjunto de todos los **operadores  $T$  de Markov**. Por otra parte, toda **cópula** (función en el cuadrado unidad que relaciona la función de distribución conjunta con las funciones marginales), tiene asociada unívocamente una medida doblemente estocástica. Se establece por tanto, una biyección entre los tres conceptos.

**Objetivos y desarrollo de actividades:**

- 1.- Describir la biyección entre Medidas doblemente estocásticas y Operadores de Markov.
- 2.- Definir la topología en  $M$  como la topología débil para operadores en  $L_2$ , donde  $M$  es compacto.
- 3.- Analizar la situación en el caso de considerar operadores en el espacio de Banach de las funciones medibles esencialmente acotadas en  $I$ .
- 4.- Identificar las medidas doblemente estocásticas con la traza de un par de funciones que conservan la medida de Lebesgue en  $I$ .

5.- Aplicaciones: Estudiar el isomorfismo entre operadores de Markov, Cópulas y Medidas doblemente estocásticas. Describir los operadores de Markov como versión de la esperanza condicional de  $f_0Y$  dada  $X$ , siendo  $X, Y$  variables aleatorias definidas sobre un mismo espacio de probabilidad y  $f$  una función medible.

*Actividades a desarrollar:*

Revisión de la bibliografía propuesta. Repaso de los conceptos matemáticos y resultados previos para abordar los temas propuestos. Localización de los objetivos. Planteamiento y desarrollo de los contenidos de cada objetivo.

*Objetivos matemáticos planteados*

Presentación y relación de los conceptos: medidas doblemente estocásticas, funciones que preservan la medida, espacios de Hilbert  $L_2$ , Operadores de Markov, presentación y propiedades básicas de las cópulas como funciones que relacionan la distribución conjunta y las medidas asociadas a cada cópula.

Objetivo central del trabajo:

**Describir el isomorfismo: imedidas doblemente estocásticas<->  
<->Operadores de Markov<->Cópulas**

*Bibliografía para el desarrollo matemático de la propuesta:*

**Bibliografía:**

1. Rudin, W.: Functional Analysis. Mc. Graw-Hill, Singapore, 1987.

2. Olsen, E.T., Darsow, W.F., Nguyen, B.: Copulas and Markov Operators. Proceedings of the Conference on Distributions with Fixed Marginals and Related Topics. IMS Lectures Notes, Monogr. Ser. Vol 28 (1996) 244-259.
3. Billingsley, P. Probability and Measure. 3<sup>rd</sup>. ed. J. Wiley , NY, 1991.
4. Darson, W.F., Nguyen, B., Olsen, E.F.: Copulas and Markov process. *Illinois J. Math.* 35 (1992) 600-642.
5. Jaworski, P., Durante, F., Hardle, W., Rychlik, T. editors. Copulas Theory and its Applications. Lectures Notes in Statistics-Proceeding. Springer-Berlin-Hidelberg, 2010.
6. Mikusinski, P., Taylor, M.D.: Markov operators and n-copulas. *Ann. Polon. Math.* 96 (1) (2009)

*Otras referencias (si procede):*

Firma del estudiante  
(solo para trabajos propuestos por alumnos)

Firma del responsable de tutorización  
(solo para trabajos propuestos por estudiantes)

Manuel Díaz Carrillo

Firma del responsable de cotutorización  
(solo para trabajos propuestos por estudiantes)

En, Granada, a 19 de Junio de 2020